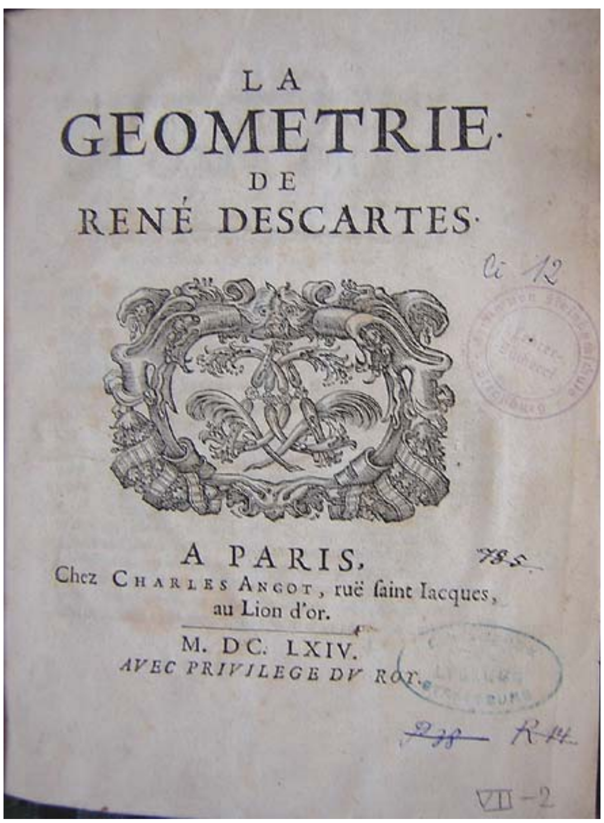
Rappels sur la géométrie cartésienne

René Descartes (1596-1650)

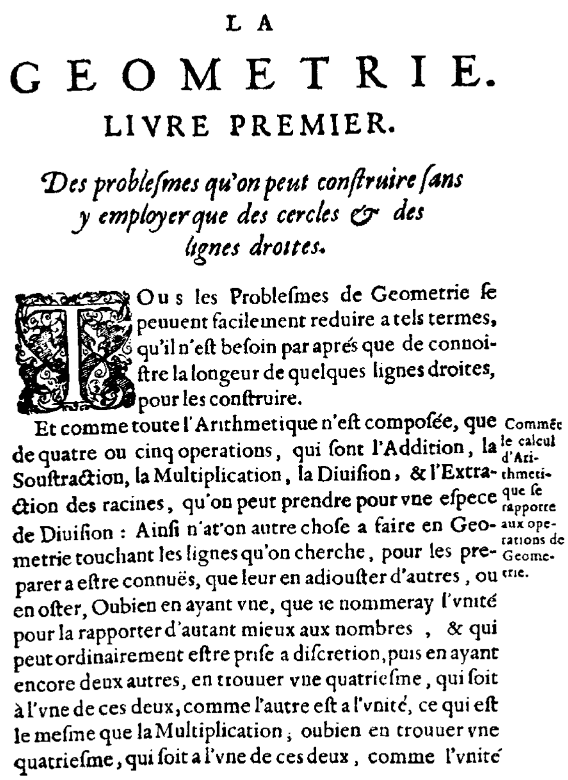
René Descartes (1596-1650) publie en 1637, à Leyde, aux Pays-Bas, un ouvrage, *La Géométrie*, qui allait permettre de réunir deux domaines des mathématiques conçus dans un premier temps comme séparés : la géométrie et l'algèbre. Dans cet ouvrage il montrait que toutes les courbes géométriques étudiées jusqu'alors pouvaient être conçues comme les solutions d'une équation, et toutes les équations étudiées jusqu'alors pouvait se visualiser sous la forme d'une courbe. Pour permettre ce « rapprochement », Descartes introduisit quelque chose qui ressemble à notre système d'axes. Pour des raisons de commodité, il convient de prendre des axes perpendiculaires. L'intersection de ces deux axes s'appelle l'*origine des coordonnées*, ou simplement l'*origine*. Chacun de ces axes est muni d'une direction ainsi que d'une unité de mesure. On parle alors d'un *système d'axes orthonormés*.



LA
GEOMETRIE.
DE
RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë ſaint Iacques, au Lion d'or.
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Page de titre de la *Géométrie* de 1637



LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Fac-similé de la première page de la *Géométrie*

1. Trouver les coordonnées des projections sur l'axe des abscisses et des ordonnées des points $A(2;-3)$ $B(-5;-1)$ et $C(-3;-2)$.

2. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points $A(2;3)$ $B(-1;-1)$ et $C(a;b)$ par rapport à l'axe Ox et à l'axe Oy.

3. Trouver les coordonnées du point symétrique au point $A(a;b)$ par rapport à l'origine des coordonnées.

4. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points $A(2;3)$, $B(5;-2)$ et $C(a;b)$ par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

5. Trouver les coordonnées des points symétriques aux points $A(3;5)$, $B(-4;3)$ et $C(a;b)$ par rapport à la bissectrice du deuxième quadrant.

6. Déterminez dans quel quadrant se trouve le point $M(x;y)$, si:
1) $xy > 0$ 2) $x - y = 0$ 3) $x + y > 0$ 4) $x - y > 0$.

7. On donne les points $M_1(2;-2)$, $M_2(2;2)$, $M_3(2;-1)$, $M_4(3;-3)$, $M_5(5;-5)$, $M_6(3;-2)$.
Trouver les points qui se trouvent sur la courbe d'équation $x + y = 0$ et ceux qui n'appartiennent pas à cette courbe. Quelle est la courbe définie par cette équation ? Représenter cette courbe.

8. Déterminer quelles sont les courbes définies par les équations suivantes et les représenter :
1) $x - y = 0$ 2) $x - 2 = 0$ 3) $y - 5 = 0$ 4) $x = 0$
5) $x^2 - xy = 0$ 6) $x^2 - y^2 = 0$ 7) $y^2 - 9 = 0$ 8) $x^2 = y^2$
9) $x^2 + y^2 = 16$ 10) $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 9$ 11) $x^2 + (y+3)^2 = 1$
12) $x^2 + 2y^2 = 0$ 13) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + 1 = 0$.

9. Parmi les courbes suivantes, trouver celles qui passent par l'origine:
1) $x + y = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 36 = 0$ 3) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$.

10. On donne les courbes

1) $x^2 + y^2 = 49$ 2) $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 25$

3) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$ 4) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

Trouver leurs points d'intersections avec les axes Ox et Oy .

11. Trouver les points d'intersection des courbes

1) $x^2 + y^2 = 8$ et $x - y = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$.

12. Montrer que la distance entre deux points $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$ est donnée par la formule

$$\delta(A;B) = \sqrt{\left(a_1 - b_1\right)^2 + \left(a_2 - b_2\right)^2}$$

13. Déterminer l'équation de l'ensemble des points qui se trouvent à égale distance des axes de coordonnées.

14. Déterminer l'équation de l'ensemble des points qui se trouvent à une distance b de l'axe OX

15. Soit $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$ deux points du plan. Montrer que le milieu du segment AB est donné par la formule $M(A;B) = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2};\dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

16.** On mène du point $C(10;-3)$ toutes les droites possibles qui coupent l'axe des ordonnées. Déterminer l'équation de l'ensemble des points milieux de ces segments.

17. Déterminer l'équation de l'ensemble des points situés à égale distance des points

1) $A(3;2)$ et $B(2;3)$ 2) $A(5;-2)$ et $B(-3;-2)$.

18. Déterminer l'équation du cercle centré à l'origine des coordonnées et de rayon r .

19.** Déterminer l'équation de l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points donnés $F_1(-3;0)$ et $F_2(3;0)$ est une quantité constante 10.

20.** Déterminer l'équation de l'ensemble des points dont les distances à un point donné $F(3;0)$ sont égales aux distances de ces mêmes points à la droite donnée $x + 3 = 0$.

21. Trouver les points d'intersection de la droite $2x - 3y - 12 = 0$ avec les axes de coordonnées et construire cette droite.

22. Déterminer l'équation de la droite parallèle à deux droites données et passant entre elles à distance égale de celles-ci dans chacun des cas suivants:

1) $\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ 3x-2y-13=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ 4x+6y+17=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x-15y-1=0 \\ x-5y-2=0 \end{cases}$.

23.** Trouver l'angle φ formé par les deux droites:

1) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 5x-y+7=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 2x-4y+3=0 \end{cases}$.

24. Démontrer que l'équation d'une droite qui passe par le point $M_1(x_1;y_1)$ et qui est parallèle à la droite $Ax+By+C=0$ peut se mettre sous la forme suivante: $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$.

25. Démontrer que :
Deux droites d'équations $A_1x+B_1y+C_1=0$ et $A_2x+B_2y+C_2=0$ sont perpendiculaires si et seulement si $A_1A_2+B_1B_2=0$.

26. Calculer la distance d du point à la droite dans chacun des cas suivants:
1) $A(2;-1)$ et $4x+3y+10=0$ 2) $P(-2;3)$ et $3x-4y-2=0$.

Réponses

1. 2 et -3 ; -5 et -1 ; -3 et -2.
2. -3 et -2 ; 1 et 1 ; -*b* et –*a*.
3. -*a* et –*b*.
4. 3 et 2 ; -2 et 5 ; *b* et *a*.
5. -5 et -3 ; -3 et 4 ; -*b* et –*a*.
6. **1)** Dans le 1er et le 3ème quadrant.
2) Sur la bissectrice des 1er et 3ème quadrant.
3) Dans le demi-plan supérieur limité par la bissectrice des 2ème et 4ème quadrant.
4) Dans le demi-plan inférieur limité par la bissectrice des 1er et 3ème quadrant.
7. M_1, M_4, M_5. Il s'agit de la droite bissectrice des 2e et 4e quadrants.
9. La courbe 1).
10. **1)** $(-7;0),(7;0),(0;-7),(0;7)$.
2) $(-2;0),(-10;0)$.
3) $(0;0),(0;-16),(12;0)$.
4) Pas d'intersection avec le système d'axes.
11. **1)** $(-2;-2),(2;2)$.
2) Pas d'intersection entre ces deux courbes.
13. $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.
14. $y^2 = b$
16. $\left(5;\dfrac{y-3}{2}\right)$ soit la droite verticale d'équation $x = 5$.
17. **1)** $y = x$.
2) $x = 1$.
18. $x^2 + y^2 = r^2$.
19. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.
20. $y^2 = 12x$
21. $(6;0),(0;-4)$. C'est la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}x - 4$
22. 1) $3x - 2y - 7 = 0$ 2) $8x + 12y + 5 = 0$ 3) $6x - 30y - 7 = 0$.
26. 1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) 0.
27. 1) 3 2) 4.