Exercice 8

Soit P(x;y) un point du plan. P est à distance 5 du plan $\Leftrightarrow \delta(O;P)=5 \Leftrightarrow y^2+y^2=5^2$

Par exemple, le point I(3 ;4) satisfait cette équation et est donc à une distance égale à 5 de l'origine. L'ensemble des points satisfaisant cette équation est un cercle centré à l'origine de rayon 5.

Exercice 9

Les points à une distance 6 de P(5 ; 3) vérifient $(x-5)^2+(y-3)^2=6^2$

Les points qui sont sur l'axe des ordonnées vérifient $x=0$

Nous avons donc un système de deux équations, qu'on résout facilement par substitution :

$$(0-5)^2+(y-3)^2=6^2 \Leftrightarrow (y-3)^2=11 \Leftrightarrow y-3=\pm\sqrt{11} \Leftrightarrow y=3\pm\sqrt{11}$$

Les points sont donc $Q_1(0;3+\sqrt{11})$ et $Q_2(0;3-\sqrt{11})$

Exercice 10

Les points à une distance 5 de P(-2 ; 4) vérifient $(x-(-2))^2+(y-4)^2=5^2$

Ici l'autre équation est $y=0$ car on s'intéresse aux points de l'axe des abscisses donc :

$$(x+2)^2+(0-4)^2=5^2 \Leftrightarrow (x+2)^2=9 \Leftrightarrow x+2=\pm 3 \Leftrightarrow x_1=1;x_2=-5$$

Les points sont donc $Q_1(-5;0)$ et $Q_1(1;0)$

Exercice 11

Les points à une distance 6 de P(1 ; 3) vérifient $(x-1)^2+(y-3)^2=6^2$

On injecte l'autre contrainte qui dit que le point (2a; a) doit être solution : $(2a-1)^2+(a-3)^2=6^2$

On résout : $(2a-1)^2+(a-3)^2=6^2 \Leftrightarrow 4a^2-4a+1+a^2-6a+9=36 \Leftrightarrow 5a^2-10a-26=0 \Leftrightarrow$

$$a_{1,2}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 5\cdot(-26)}}{2\cdot 5} \Leftrightarrow a_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{155}}{5}$$

Dernière contrainte : le point doit être dans le troisième quadrant ; on ne garde donc que $Q(2-2\frac{\sqrt{155}}{5};1-\frac{\sqrt{155}}{5})$, car $R(2+2\frac{\sqrt{155}}{5};1+\frac{\sqrt{155}}{5})$ est dans le premier quadrant.

Remarque : les calculs pour cet exercice sont plus simples lorsque la distance est 5.

Réponse : $(-2;-1)$

Exercice 12

$\overline{OP}=4$ signifie que le point appartient au cercle centré à l'origine (0 ; 0) et de rayon 4 ;

les points doivent donc satisfaire l'équation suivante : $(x-0)^2+(y-0)^2=4^2$

Deuxième contrainte : y= -2. On substitue :

$$x^2+(-2)^2=4^2$$

On résout : $x^2+(-2)^2=4^2 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{5}$

Les points sont donc $Q_1(2\sqrt{3};-2)$ et $Q_2(-2\sqrt{3};-2)$

Exercice 13

(a) L'équation du cercle est de la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Le centre est donc $C_0(3;-2)$ et le rayon $r=6$

(b) On substitue x et y par respectivement 7 et -5 dans l'équation du cercle : $(7-3)^2+(-5+2)^2\overset{?}{=}36$
Comme $25\neq 36$ le point n'appartient pas au cercle.

(c) On substitue x et y par respectivement 8 et -5 dans l'équation du cercle : $(8-3)^2+(-5+2)^2\overset{?}{=}36$
Comme $34\neq 36$ le point n'appartient pas au cercle.

(d) Il y a toujours 4 points « faciles » à trouver.
Posons x = 3 : on obtient $(y+2)^2=36 \Leftrightarrow y+2=\pm 6 \Leftrightarrow y=-2\pm 6 \Leftrightarrow y=-8$ ou $y=4$
d'où $P_1(3;-8)$ et $P_2(3;4)$
Posons y = -2 : on obtient $(x-3)^2=36 \Leftrightarrow x=\pm 6 \Leftrightarrow x=3\pm 6 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=9$
d'où $P_3(-3;-2)$ et $P_4(9;-2)$
Pour le 5e point, on peut faire un choix « malin » ; choisissons par exemple $x=9$, on a donc

$$(9-3)^2+(y+2)^2=36 \Leftrightarrow (y+2)^2=0 \Leftrightarrow y=-2 \quad \text{, et donc} \quad P_5(9;-2)$$

(e) On substitue x et y par respectivement -2 et 1 dans l'inéquation et on la vérifie :

$$(x-3)^2+(y+2)^2\leq r^2 \Leftrightarrow (-2-3)^2+(1+2)^2\overset{?}{\leq}36$$

Comme $34\leq 36$ le point est bien à l'intérieur du cercle.

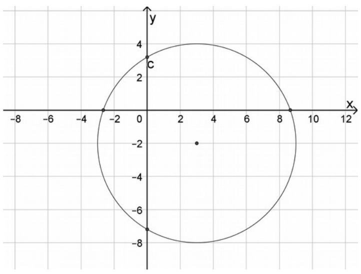
(f) Intersections avec l'axe Ox : $y=0$
Il s'agit donc de résoudre $(x-3)^2+(0+2)^2=36 \Leftrightarrow x-3=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x=3\pm 4\sqrt{2}$
Les points sont donc $I_1(3+4\sqrt{2};0)$ et $I_2(3-4\sqrt{2};0)$

Intersections avec l'axe Oy : $x=0$

Il s'agit donc de résoudre $(0-3)^2+(y+2)^2=36 \Leftrightarrow (y+2)=\pm\sqrt{27} \Leftrightarrow y=-2\pm 3\sqrt{3}$

Les points sont donc $I_3(0;-2+3\sqrt{3})$ et $I_4(0;-2-3\sqrt{3})$

(g)



Exercice 14

(a) L'équation du cercle est de la forme

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \quad \text{avec comme centre} \quad C(x_0;y_0) \quad .$$

On a donc $(x-4)^2+(y+2)^2=64$

(b) Comme $C(-4;-2)$ on a $(x+4)^2+(y+2)^2=r^2$.

Pour déterminer r on utilise le point $P(1;3)$ (r est la distance entre P et C) :

$$(1+4)^2+(3+2)^2=r^2 \Leftrightarrow r^2=50$$

On a donc $(x+4)^2+(y+2)^2=50$

Exercice 15

(a) L'équation de l'axe Ox est $y=0$

L'équation du cercle est $(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

Afin d'avoir un seul point d'intersection (pour avoir tangence), il faut que le système suivant

possède une unique solution : $\begin{cases} y=0 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=r^2 \end{cases}$

On résout par substitution

Il s'agit donc de déterminer r en imposant $\Delta=0$:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-4ac=0 \Leftrightarrow (-6)^2-4\cdot 1\cdot(13-r^2) \Leftrightarrow 36-52+4r^2=0 \Leftrightarrow 4r^2=16 \Leftrightarrow r^2=4$$

On obtient donc $(x-3)^2+(y-2)^2=4$

(b) On procède comme au point 5 :

$$\begin{cases} y=5 \\ (x-5)^2+(y+2)^2=r^2 \end{cases}$$ doit avoir une unique solution.

$$(x-5)^2+(5+2)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2-10x+25+49=r^2 \Leftrightarrow x^2-10x+74-r^2=0$$

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 10^2-4\cdot 1\cdot(74-r^2)=0 \Leftrightarrow 100-296+4r^2=0 \Leftrightarrow r^2=49$$

Et donc $(x-5)^2+(y+2)^2=49$

(c) Comme $C(1;-1)$ on a $(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$

Pour déterminer r on utilise le point $P(3;2)$ (r est la distance entre P et C) :

$$(3-1)^2+(2+1)^2=r^2 \Leftrightarrow 4+9=r^2$$

On a donc $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

Exercice 16

(a)

$x^2+y^2+6x+8y+24=0$	$\Leftrightarrow$	(on réarrange les termes pour compléter les carrés)
$x^2+6x+9-9+y^2+4y+16-16=-24$	$\Leftrightarrow$	(id. rem. n°1 x 2)
$(x+3)^2+(y+4)^2=-24+9+16$	$\Leftrightarrow$	
$(x+3)^2+(y+4)^2=1^2$	$\Leftrightarrow$	
$C(-3;-4)$ et $r=1$		

(b)

$x^2+y^2-4x+2y+6=0$	$\Leftrightarrow$	(on réarrange les termes et on complète les carrés)
$x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1=-6$	$\Leftrightarrow$	(id. rem. n°1 et n°2)
$(x-2)^2+(y+1)^2=-6+4+1$	$\Leftrightarrow$	
$(x-2)^2+(y+1)^2=-1$		

Cette dernière équation n'a pas de solution car la somme de deux carrés ne peut pas être inférieure à 0. Il ne s'agit donc pas d'un cercle.

(c)

$x^2+y^2-20y+36=0$	$\Leftrightarrow$	(on complète le carré)
$x^2+y^2-20y+100-100=-36$	$\Leftrightarrow$	(id. rem. n°2)
$x^2+(y-10)^2=-36+100$	$\Leftrightarrow$	
$x^2+(y-10)^2=8^2$	$\Leftrightarrow$	
$C(0;10)$ et $r=8$		

$$x^2+y^2-x+3y-1=0 \Leftrightarrow$$ (on réarrange les termes et on complète les carrés)

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$ (id. rem. n°1 x 2)

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$C(-0.5;-1.5) \text{ et } r=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Exercice 17

(a) $x^2+y^2-25=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=5^2 \Leftrightarrow C(0;0)$ et $r=5$

(b) $x^2+y^2+36=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=-36$ Cette équation n'a pas de solution car la somme de deux carrés ne peut pas être inférieure à 0. Il ne s'agit donc pas d'un cercle.

(c) On procède de la même manière qu'à l'exercice 14 :

$$x^2+y^2-4x+6y+4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=0+9 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=3^2 \Leftrightarrow C(2;-3) \text{ et } r=3$$

(d) $x^2+y^2+10y+9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+10y+25=-9+25 \Leftrightarrow x^2+(y+5)^2=4^2 \Leftrightarrow C(0;-5)$ et $r=4$

(e) $x^2+y^2-8x-6y=0 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-6y+9=0+16+9 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=5^2 \Leftrightarrow C(4;3)$ et $r=5$

(f) $x^2+y^2+4x-2y+9=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1=-9-4-1 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=-13$

Cette équation n'a pas de solution car la somme de deux carrés ne peut pas être inférieureà 0. Il ne s'agit donc pas d'un cercle.

(g)

$$2x^2+2y^2-2x+10y+11=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+5y=-\frac{11}{2} \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+5y+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{11}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow C(0.5;-2.5) \text{ et } r=1$$

(h)

$$225x^2+225y^2+600x-990y+1089=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{8}{3}x-\frac{22}{5}y^2+\frac{121}{25} \Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2-\frac{22}{5}y+\frac{121}{25}=\frac{16}{9} \Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{5}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow C\left(-\frac{4}{3};\frac{11}{5}\right) \text{ et } r=\frac{4}{3}$$