Collège de Saussure **Epreuve de mathématiques de 3e année, niveau avancé**	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	21 octobre 2021
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul.

Nom : …………………………………….. Prénom : ………………... Groupe : …….

Répartition des points

Exercice 1 : 12 points

Exercice 2 : 8 points

Exercice 3 : 12 points

Exercice 4 : 6 points

Exercice 5 : 8 points

Exercice 6 : 14 points

Exercice 7 : 15 points

Notations : …………. → …. / 2 points

Total : ……. / 77 points

Français (facultatif) : …………. → …. / 1 point

Total final : ……. / 77 points

Note : ………/ 6

Exercice 1 (environ 12 points)

(a) Donner la définition mathématique de la convergence de la suite $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers L :

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L $\Leftrightarrow$

(b) Soit la suite définie par $s_n=\frac{2}{\sqrt{n}}+1$. Compléter le terme manquant :

« s_n est appelé le …………………………………………………… de la suite».

(c) Utiliser la définition précédente pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} s_n=1$.

(d) A partir de quel terme la suite est-elle proche de 1 au millième près ?

Exercice 2 (environ 8 points)

Montrer par récurrence que $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exercice 3 (environ 12 points)

(a) Donner la définition mathématique de «*n* est un nombre premier» :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

n est un nombre premier $\Leftrightarrow$

(b) On démontre ci-dessous qu’il existe une infinité de nombres premiers :

Pour chaque [……………], compléter par ce qui manque.

Démonstration :

Supposons qu’il existe un nombre *n* de nombres premiers qu’on nomme $p_1, p_2, \ldots, [\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Considérons le nombre $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot [\ldots\ldots\ldots\ldots] + 1$

Ce nombre n’est pas divisible par p_1, car sinon on aurait : $p = k \cdot p_1$, avec $k \in [\ldots\ldots\ldots\ldots]$

et donc $k \cdot p_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot [\ldots\ldots\ldots\ldots] + 1 \quad \Leftrightarrow p_1 \cdot ([\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]) = [\ldots\ldots\ldots\ldots]$

ce qui impliquerait que p_1 soit un diviseur de [……………………], ce qui est impossible,

car [………………………………………..…………...………………………………]

On en déduit que p_1 ne divise pas [……………].

Le même raisonnement montre que $p_2, p_3, \ldots, [\ldots\ldots\ldots\ldots]$ ne divisent non plus pas […….].

Donc […………...……….] est un autre nombre [……………….……] qui n’appartient pas à liste initiale $p_1, p_2, \ldots, [\ldots\ldots\ldots\ldots]$.

Ceci est impossible, car […………………………………………...………...………….].

On en conclut qu’il existe un nombre […………………………..] de nombres premiers.

cqfd

(c) Compléter le terme manquant :

«Une telle démonstration s’appelle une démonstration par […………………………...]»

Exercice 4 (environ 6 points)

Calculer la limite suivante en justifiant toutes les étapes au dessus des égalités qui comportent au moins une limite en utilisant les théorèmes connus rappelés plus bas (dans une rédaction simplifiée) ; <u>n’utiliser qu’un seul résultat par égalité</u> :

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{-64}{x+1}} =$$

Théorème [Limites de fonctions élémentaires]

[L1] $\lim_{x \to a} k = k, \forall a \in \mathbb{R}$

[L2] $\lim_{x \to a} x = a, \forall a \in \mathbb{R}$

[L3] $\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$ et $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L4] $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L5] $\lim_{x \to a} \log_b(x) = \log_b(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lim_{x \to a} \exp_b(x) = \exp_b(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Théorème [Propriétés des limites]

[PrL1] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

[PrL2] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

[PrL3] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

[PrL4] Si Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent et $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

[PrL5] Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{t \to b} g(t) = g(b)$ existent, alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$

[PrL6] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et si $k \in \mathbb{R}$ est une constante, alors on a $\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

[PrL7] Si f est une fonction polynomiale alors, pour $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

[PrL8] Si f et g sont telles que $f(x) < g(x)$ pour $x \in I$, et si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent,

alors on a: $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ pour $x \in I$

Exercice 5 (environ 8 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x}{x-4}, \text{si} \quad x<4 \\ -32\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}, \text{si} \quad x>4 \\ -1, \text{si} \quad x=4 \end{cases}$.

Est-elle continue en $x= 4$?

(on ne demande pas de justification autre que les calculs détaillés).

Exercice 6 (environ 14 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{4(x^2+3x)}{x^2+2x-3}$.

(a) Calculer $\lim_{x \to -3} f(x)$.

(b) Déterminer les asymptotes verticale et horizontale de f

(c) Expliquer pourquoi on peut être certain que f n’a pas d’asymptote oblique.

(d) Proposer ci-dessous une représentation graphique de f cohérente avec les résultats précédents (on ne demande pas de nouveaux calculs) :

Exercice 7 (environ 15 points)

On considère la fonction *g* définie par $g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$.

(a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

(b) Montrer que $y=0$ est une asymptote horizontale de *g* à $+\infty$

(c) Déterminer l’asymptote oblique de *g à* $-\infty$.

(d) Proposer une représentation graphique de g cohérente avec les résultats précédents (on ne demande pas de nouveaux calculs) : .