Ma3A Test n°2 Corrigé

<u>ex1</u> $[/10]$

a) $\left(\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]\sqrt{x}\right)' = \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]'\sqrt{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$ /6

$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $\left(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}}\cdot\left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}}\cdot\frac{1(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{-x^2-1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\cdot(x^2-1)^2}$ /4

<u>ex2</u> $[/10]$

a) $f(x) = x^3+x^2-6x+2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+2x-6$

$f(1) = -2$ $\qquad f'(1) = -1$ /3

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$\Leftrightarrow y = (-1)(x-1)+(-2)$

$\Leftrightarrow y = -x-1$ /2

b) on cherche a tq $f'(a) = -1$ /2

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-6 = -1$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-5 = 0$

$\Delta = 4-4\cdot 3\cdot(-5) = 64$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm 8}{6}$ $\to x_1 = -10/6 = -5/3$, $\to x_2 = 6/6 = 1$ /3

<u>ex6</u> $[/5]$

on reconnait $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ pour $f(x) = (1+x)^{2001}$ et $a=0$

donc $f'(x) = 2001(1+x)^{2000}\cdot 1$

$f'(0) = 2001$

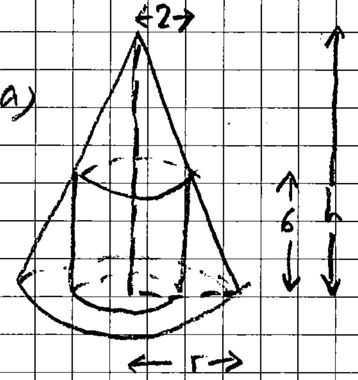
c'est vrai

1 + 4

ex 5

[/14]

a)



À optimiser : $V_{cône} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ /2

on a : thm Thalès : $\frac{h}{6} = \frac{r}{r-2}$

$\Leftrightarrow h = \frac{6r}{r-2}$ /3

d'où $f(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{6r}{r-2} = \frac{2\pi r^3}{r-2}$ /1

b) $f'(r) = \frac{6\pi r^2(r-2) - 2\pi r^3 \cdot 1}{(r-2)^2} = \frac{6\pi r^3 - 12\pi r^2 - 2\pi r^3 \cdot 1}{(r-2)^2}$

$= \frac{4\pi r^3 - 12\pi r^2}{(r-2)^2} = \frac{4\pi r^2(r-3)}{(r-2)^2}$ /3

r		0		2		3	
$4\pi r^2$	+	0	+	+	+	+	+
$r-3$	−	−	−	−	−	0	+
$r-2$	−	−	−	0	+	+	+
$f'(r)$	−	0	+	‖	−	0	+
$f(r)$	↘		↗		↘	min	↗

/3

r doit être > 2

$r = 3$ cm, et donc $h = \frac{6 \cdot 3}{1} = 18$ cm /2

ex 3 [/21]

$$f(x) = \frac{-2x^2(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \frac{-x^2}{2(x+2)} \quad (\text{si } x \neq 2)$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ /1

Z_f : $-x^2(x-2) = 0$ donc $Z_f = \{0\}$ /1

$x=0$ ou $x=2 \notin D_f$

$f(0) = 0$

as. vert : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-x^2}{2(x+2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ pas d'as. v. /2

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{-x^2}{2(x+2)} = \frac{-4}{0}$ type "$\frac{1}{0}$"

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{-4}{2\cdot 0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{-4}{2\cdot 0^-} = +\infty$

donc $x = -2$ as. vert de f /3

as. obl :

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & 2x+4 \\ \hline -(-x^2-2x) & -\frac{x}{2}+1 \\ 2x & \\ -(2x+4) & \\ -4 & \end{array}$$

donc $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 - \frac{4}{2x+4}$

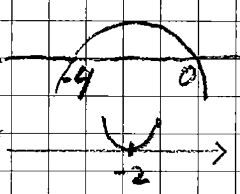
donc $y = -\frac{x}{2} + 1$ as. obl de f à $\pm\infty$ /3
(donc pas d'as. horiz)

$$f'(x) = \frac{-2x\cdot 2(x+2) + x^2\cdot 2}{4(x+2)^2} = \frac{-4x^2-8x+2x^2}{4(x+2)^2} = \frac{-2x^2-8x}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{2}(x^2+4x)}{\cancel{4}(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x}{2(x+2)^2} = \frac{-x(x+4)}{2(x+2)^2}$$ et $x \neq 2$ /3

⚠ ne pas oublier le pb à x=2!

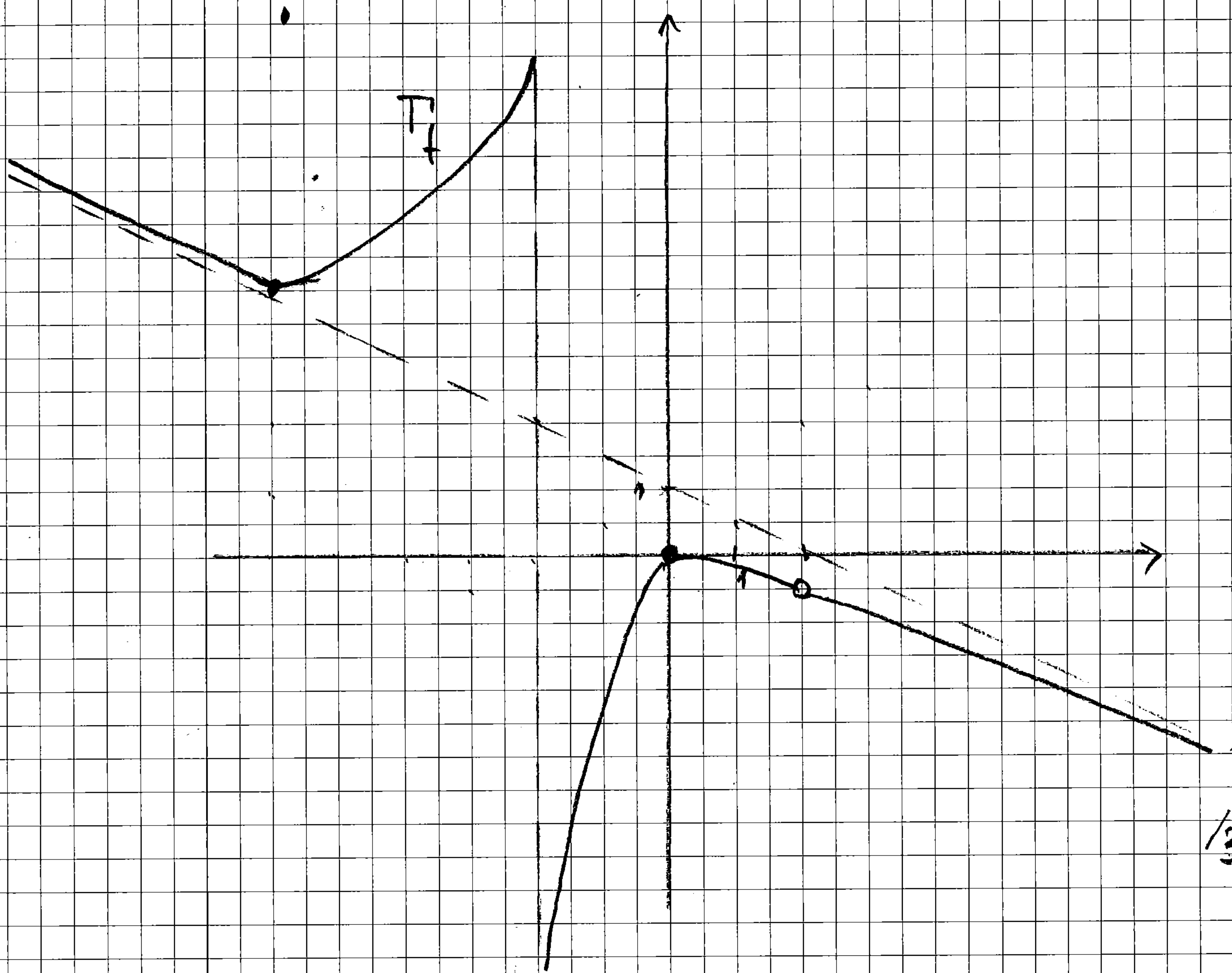
x		-4		-2		0		2	
$-x^2-4x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$ ⚠	$\searrow$



/4

$f(-4) = -\frac{16}{-4} = 4$

$f(0) = 0$ /1



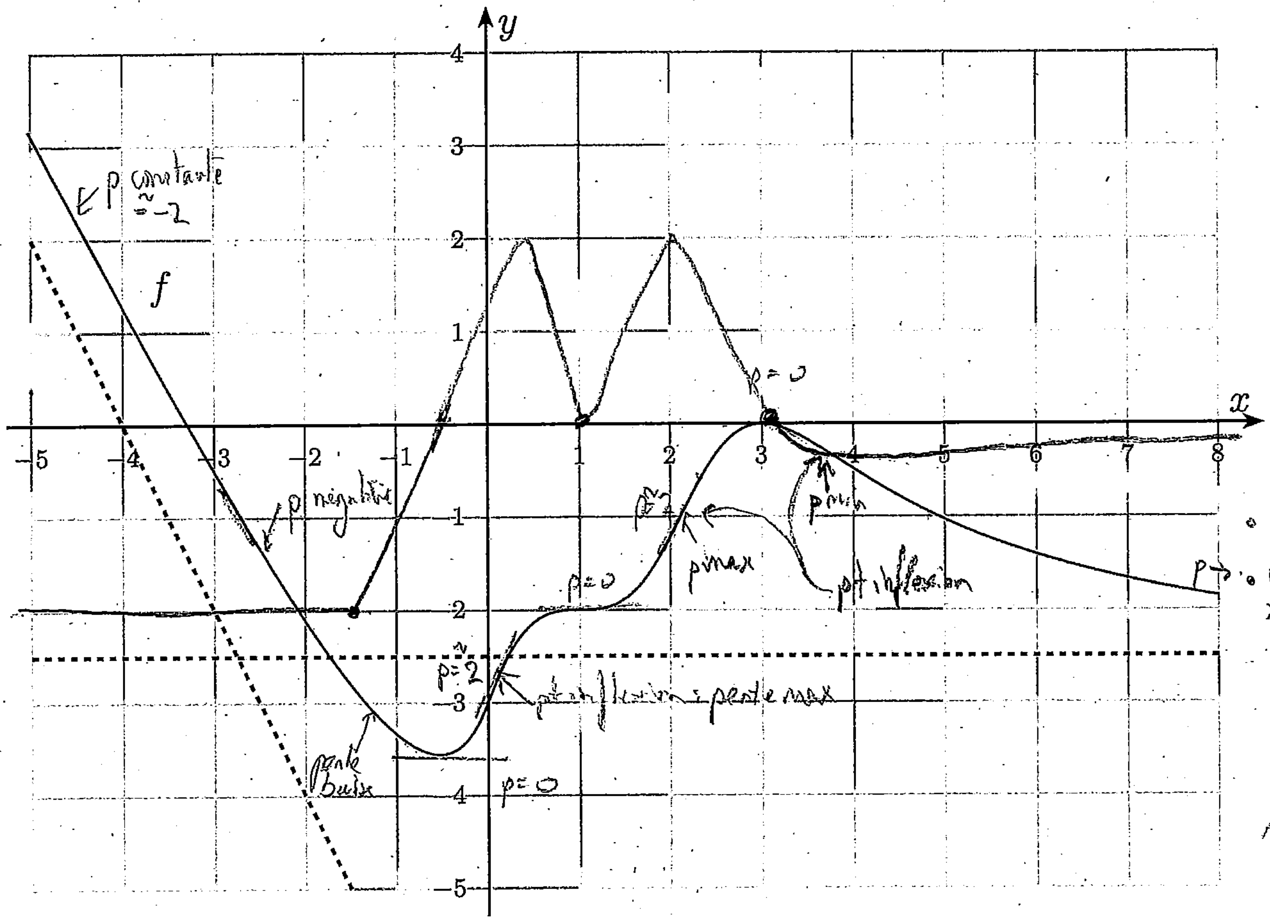
/3

Exercice 4 (environ 13 points)

On considère la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous pour $x \in]-5; 8[$.

(a) Sur le même repère, tracer le plus précisément possible le graphe de sa fonction dérivée f'

Les éléments qui vous permettent d'élaborer cette esquisse doivent être apparents.



• zéros : /3
• cte pr x ≤ −1,3 /2
max /2
min /3

/10

(b) Donner le tableau de signes (approximatif) de sa dérivée seconde en justifiant les éléments importants :

x		0,3		1		2		3,7	
$f''(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	∪	pt inf	∩	pt inf	∪	pt inf	∩	pt inf	∪

/3