Épreuve semestrielle de mathématiques

Date : 17 décembre 2021

Nom :	**Prénom :**	**Groupe :**

Cours : 3MA2.DF01-02.

Durée : 160 minutes.

Nombre de pages de l'énoncé : 3 pages.

Mode d'impression : recto-verso.

Annexe : aucune.

Nombre de points de l'épreuve : 72 points.

Documents et matériel autorisés	
Mis à disposition par le collège :	**Personnels à l'élève :**
Feuilles quadrillées.	Calculatrice personnelle TI-30X Pro ou modèle équivalent (non graphique, non programmable) ; table CRM personnelle non annotée.

Indications et directives :

i) Tous les calculs et les étapes de raisonnement doivent figurer sur la copie.

ii) **2 points** seront attribués à la qualité de la rédaction et de l'écriture mathématique.

Respect des consignes, mise en évidence des résultats et respect des notations mathématiques usuelles : Nombre de points : .../2 pts

Exercice 1 *(8 points)*

En utilisant les formules de dérivation, calculer la dérivée des fonctions suivantes.

i) $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\sqrt{x^2+5}}$ ii) $f(x) = \left(\sqrt{x} + (x^3 - x)\cdot\sin(x)\right)^3$

Il n'est pas demandé de simplifier les résultats.

/8 points

Exercice 2 *(4 points)*

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} + x$.

/4 points

Exercice 3 *(18 points)*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x+1)^2}$, dont on donne la première et la deuxième dérivée (que vous n'avez donc pas besoin de calculer) :

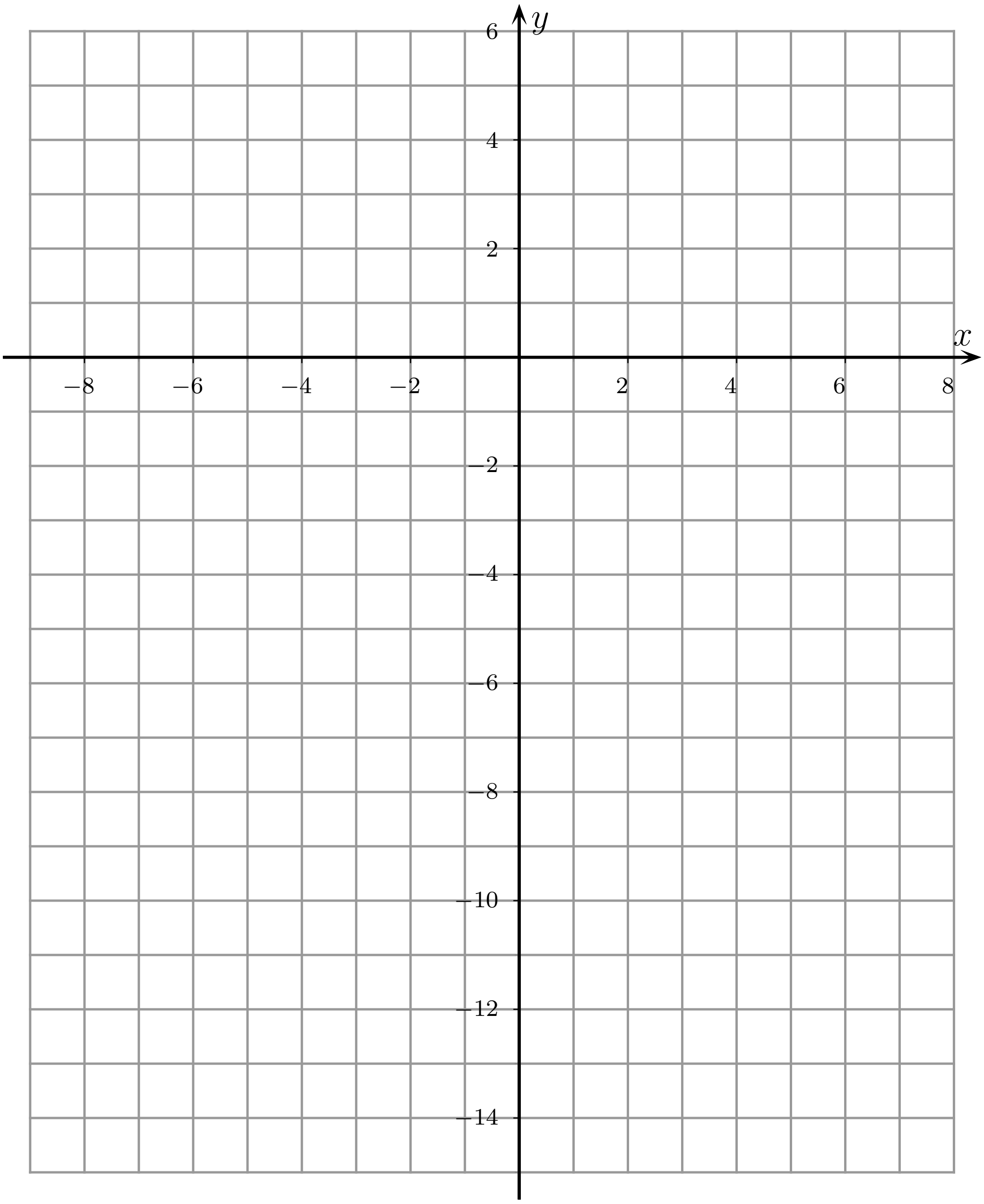
$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x - 4)}{(x+1)^3} \qquad\qquad f''(x) = \frac{2(7x-2)}{(x+1)^4}$$

i) Déterminer les équations de toutes les asymptotes de f.

ii) Étudier la croissance de f et déterminer les coordonnées $(x; y)$ des éventuels extrema.

iii) Déterminer les coordonnées $(x; y)$ des éventuels points d'inflexion.

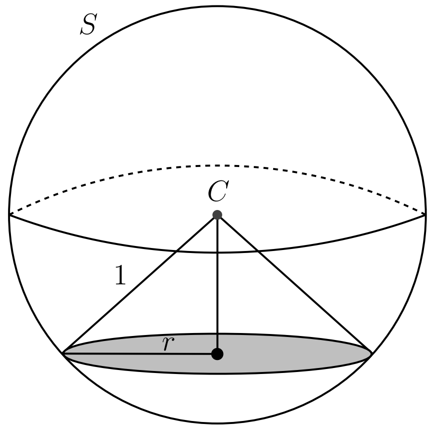
iv) Représenter graphiquement la fonction f dans le repère ci-dessous.



/18 points

Exercice 4 *(12 points)*

On considère une sphère S de rayon 1 et de centre C. À l'intérieur de la sphère on construit un cône droit de sommet C dont la circonférence de base appartient à S.



i) Soit r le rayon du cône. Montrer que le volume du cône est donné par la fonction :

$$f(r) = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{1 - r^2}$$

ii) Calculer le rayon r du cône de volume maximal.

iii) Quel est ce volume maximal ?

/12 points

Exercice 5 *(11 points)*

Déterminer les valeurs qu'il faut attribuer aux paramètres a, b, c et d afin que la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfasse simultanément toutes les conditions suivantes :

i) Son graphe passe par le point $(0; 0)$.

ii) Son graphe possède un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 1$.

iii) Son graphe admet au point d'abscisse $x = 2$ une tangente d'équation $t(x) = -4x - 8$.

/11 points

Exercice 6 *(11 points)*

Représenter graphiquement une fonction f continue et deux fois dérivable dont on donne le tableau ci-dessous, en indiquant explicitement les éventuels extrema et points d'inflexion.

		-2		-1		0		1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	1	$+$	2	$+$	3	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

/11 points

Exercice 7 *(6 points)*

Vrai ou faux ? Justifier.

i) Si $f(x) < x$ pour tout $x > 0$, alors $f'(x) < 1$ pour tout $x > 0$.

ii) Si la droite d'équation $t(x) = 2x + 4$ est tangente à la représentation graphique de la fonction f en $x = -1$, alors $f(-1) = f'(-1)$.

/6 points