Collège de Saussure **Epreuve de mathématiques de 3e année, niveau avancé**	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	6 octobre 2023
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul.

Nom : …………………………………….. Prénom : ……………….. Groupe : …….

Répartition des points

Exercice 1 : 8 points

Exercice 2 : 9 points

Exercice 3 : 9 points

Exercice 4 : 4 points

Exercice 5 : 12 points

Exercice 6 : 5 points

Exercice 7 : 6 points

Notations : …………. → …. / 2 points

Total : ……. / 55 points

Français (facultatif) : …………. → …. / 1 point

Total final : ……. / 55 points

Note : ………/ 6

Exercice 1 (environ 8 points)

(a) Donner la définition mathématique de la limite L d’une fonction f en a :

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ ...

(b) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.

Démontrer en utilisant la définition que $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

Exercice 2 (environ 9 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$.

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n=\dfrac{9-8n}{3+8n}$

Exercice 3 (environ 9 points)

(a) On admet ici le théorème suivant :

Théorème« Si $n \in \mathbb{N}$ n’est pas un multiple de 3, alors n^2 n’est pas un multiple de 3

Enoncer la contraposée de ce théorème :

(b) On démontre ci-dessous que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Pour chaque [……………], compléter par ce qui manque.

Démonstration :

Supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

on aurait $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, avec $p \in [...............]$ et $q \in [...............]$,

$\Rightarrow 3 = [..............]$

$\Rightarrow 3q^2 = [..............]$,

$\Rightarrow p^2 = 3k,$ avec un $k \in [..........]$, car [……….…..….....……...………………….………….]

$\Rightarrow p = 3i,$ avec un $i \in [..........]$, car [……….…..….....………..………………….………….]

on a donc : $3q^2 = (3i)^2$, car […………………..…..….....………..………………….………….]

$\Rightarrow 3q^2 = 9i^2$

$\Rightarrow q^2 = 3i^2$, car [……….…..….....……………………….....………………….………….]

$\Rightarrow q^2 = 3j,$ avec un $j \in [..........]$

$\Rightarrow q = 3l,$ avec un $l \in [..........]$

et enfin : $\sqrt{3} = \frac{3i}{3l}$, ce qui est [……………………………...………………………………]

On en déduit que [……………………………………………………………………..]

Exercice 4 (environ 4 points)

Calculer la limite suivante en justifiant toutes les étapes au dessus des égalités qui comportent au moins une limite en utilisant les théorèmes connus rappelés en annexe (dans une rédaction simplifiée) :

$$\lim_{x \to 0} \left(\sin \left(2x^{10} + 1 \right) + \pi \right)$$

Exercice 5 (environ 12 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x) = -\dfrac{4(x^2+3x)}{x^2+2x-3}$. Calculer

(a) $\lim_{x \to -3} f(x)$

(b) $\lim_{x \to +1} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice 6 (environ 5 points)

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x}$$

Exercice 7 (environ 6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases} 2x+k^2, \text{ si } x<2 \\ x^2+4, \; si \; x>2 \\ k+6, \; si \; x=2 \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$. Déterminer k pour que la fonction f soit continue. On ne demande aucune autre justification que les calculs.

Annexe

Théorème [Limites de fonctions élémentaires]

[L1] $\lim\limits_{x\to a} k = k\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

[L2] $\lim\limits_{x\to a} x = a\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$

[L3] $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

[L4] $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\,,\ \ \forall\, a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}\,,\ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$

[L5] $\lim\limits_{x\to a} \log_b(x) = \log_b(a)\,,\ \ \forall\, a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lim\limits_{x\to a} \exp_b(x) = \exp_b(a)\,,\ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$

Théorème [Propriétés des limites]

[PrL1] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] \ = \ \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

[PrL2] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)] \ = \ \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

[PrL3] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] \ = \ \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

[PrL4] Si Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent et $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ = \ \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

[PrL5] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t\to b} g(t) = g(b)$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to a} f(x)) = g(b)$

[PrL6] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et si $k \in \mathbb{R}$ est une constante, alors on a $\lim\limits_{x\to a} [k\cdot f(x)] = k\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

[PrL7] Si *f* est une fonction polynomiale alors, pour $a \in \mathbb{R}$, alors on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

[PrL8] Si *f* et *g* sont telles que $f(x) < g(x)$ pour $x \in I$, et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent,

alors on a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ pour $x \in I$