Exercice 1 (environ 8 points)

(a) Donner la définition mathématique de la limite L d'une fonction f en a :

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ ...

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ /2

(b) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.

Démontrer en utilisant la définition que $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

Soit $\varepsilon > 0$.

on veut $|(2x-3) - (-1)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |2x-2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 2|x-1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon/2$

posons $\delta = \varepsilon/2$

on a alors : $|x-1| < \delta \Leftrightarrow |x-1| < \varepsilon/2 \Leftrightarrow |(2x-3) - (-1)| < \varepsilon$

cqfd

donc $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$ /6

Exercice 2 (environ 9 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$.

$n=0$: $u_0=3$
$n=1$: $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{u_0-2}{2u_0+5} = \dfrac{1}{11}$
et $u_1 = \dfrac{9-8\cdot 0}{3+8\cdot 0} = 3$

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}=\dfrac{9-8n}{3+8n}$

$n=0$: $u_{0+1} \overset{?}{=} \dfrac{9-8\cdot 0}{3+8\cdot 0} = 3$ oui /2

H.R : $u_{n+1} = \dfrac{9-8n}{3+8n}$ /1

à dém. : $u_{n+2} \overset{?}{=} \dfrac{9-8(n+1)}{3+8(n+1)} = \dfrac{9-8n-8}{3+8n+8} = \dfrac{1-8n}{11+8n}$ /2

dém. : $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}-2}{2u_{n+1}+5}$ [déf (u_n)]

$= \dfrac{\frac{9-8n}{3+8n}-2}{2\frac{9-8n}{3+8n}+5}$ [H.R.]

$= \dfrac{9-8n-6-16n}{18-16n+15+40n} \cdot \dfrac{\cancel{3+8n}}{\cancel{3+8n}}$

$= \dfrac{3-24n}{33+24n}$

$= \dfrac{\cancel{3}(1-8n)}{\cancel{3}(11+8n)}$

$= \dfrac{1-8n}{11+8n}$ /4

9/1

Exercice 3 (environ 9 points)

(a) On admet ici le théorème suivant :

Théorème« Si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un multiple de 3, alors n^2 n'est pas un multiple de 3

Enoncer la contraposée de ce théorème :

Si n^2 mult de 3, alors n mult de 3 /2

(b) On démontre ci-dessous que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Pour chaque [……………], compléter par ce qui manque. /7

Démonstration :

Supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

on aurait $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, avec $p \in$[…$\mathbb{N}$…] et $q \in$[…$\mathbb{N}^*$…], (ou $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^*$) (/2)

$\Rightarrow 3=$[…p^2/q^2…] (/1)

$\Rightarrow 3q^2=$[…p^2…], (ou $\mathbb{N}^*/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^*$) (/1)

$\Rightarrow p^2=3k$, avec un $k \in$[…$\mathbb{N}$…], car [… definition de mult de 3 …] (/2)

$\Rightarrow p=3i$, avec un $i \in$[…$\mathbb{N}$…], car [… contraposée en (a) …] (/2)

on a donc : $3q^2=(3i)^2$, car [… Substitution …] (/1)

$\Rightarrow 3q^2=9i^2$

$\Rightarrow q^2=3i^2$, car [… division par 3 des deux côtés de l'égalité …] (/1)

$\Rightarrow q^2=3j$, avec un $j \in$[…$\mathbb{N}$…], ~~car~~ [……………………………]

$\Rightarrow q=3l$, avec un $l \in$[…$\mathbb{N}$…], car [……………………………]

et enfin : $\sqrt{3}=\frac{3i}{3l}$, ce qui est [… absurde …] (/2)

On en déduit que [… $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ …] (/2)

Exercice 4 (environ 4 points)

Calculer la limite suivante en justifiant toutes les étapes au dessus des égalités qui comportent au moins une limite en utilisant les théorèmes connus rappelés en annexe (dans une rédaction simplifiée) :

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(2x^{10}+1\right)+\pi\right) \overset{Pr L1}{=} \lim_{x\to 0} \sin(2x^{10}+1) + \lim_{x\to 0} \pi$$

$$\overset{Pr L5}{=} \sin\left(\lim_{x\to 0}(2x^{10}+1)\right) + \lim_{x\to 0}\pi$$

$$\underset{L1}{\overset{Pr L7}{=}} \sin(2\cdot 0^{10}+1) + \pi$$

$$= \sin 1 + \pi$$

Exercice 5 (environ 12 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=-\frac{4(x^2+3x)}{x^2+2x-3}$. Calculer

(a) $\lim_{x\to -3} f(x)$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{-4x\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-1)} \quad \text{type } "\frac{0}{0}"$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{-4x}{x-1} = \frac{12}{-4} = -3$$

/3

(b) $\lim\limits_{x\to+1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-4x}{x-1}$ type " $\frac{1}{0}$ "

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-4x}{x-1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-4x}{x-1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$ /4

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) \nexists$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-4x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$ /2

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4x}{x-1}$ type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4\cancel{x}}{\cancel{x}(1-1/x)}$ /3

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{1-1/x}$

$= \frac{-4}{1-0}$

$= -4$

Exercice 6 (environ 5 points)

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})}{x}$ type "$\frac{0}{0}$"

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + (1+\frac{x}{2})}{\sqrt{1+x} + (1+\frac{x}{2})} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1+\frac{x}{2})^2}{x\left[\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2}\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^2}{4}}{x\left[\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2}\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^{\cancel{2}}}{4\cancel{x}\left[\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2}\right]}$$

$$= -\frac{0}{4 \cdot 2}$$

$$= 0$$

Exercice 7 (environ 6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases} 2x+k^2, \text{si } x<2 \\ x^2+4, \, si \, x>2 \\ k+6, \, si \, x=2 \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$. Déterminer k pour que la fonction f soit continue. On ne demande aucune autre justification que les calculs.

- si $x < 2$: $f(x) = 2x + k^2$ polynomiale, donc continue [P.C.] (pour tout $k \in \mathbb{R}$)
- $x > 2$: $f(x) = k+6$ constante, donc continue [P.C.]
- l'enjeu est en $x = 2$:

f continue en 2 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$\Leftrightarrow 4+k^2 = 4+4 = k+6$

$k^2 = 4$

$k = \pm 2$

$k = 2$

Il faut donc avoir $k = 2$ pour que f soit continue en 2

/6