Collège de Saussure______ **Epreuve de mathématiques de 3e année, niveau avancé**	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	28 novembre 2023
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul.

Nom : ……………………………………….. Prénom : ………………... Groupe : …….

Répartition des points

Exercice 1 : 15 points

Exercice 2 : 21 points

Exercice 3 : 14 points

Exercice 4 : 9 points

Exercice 5 : 6 points

Total : ……. / 65 points

Notations : …………. → …. / 2 points

Français (facultatif) : …………. → …. / 1 point

Total final : ……. / 67 points

Note : ………/ 6

Exercice 1 (environ 15 points)

En utilisant les formules de dérivation, calculer la dérivée des fonctions réelles définies ci-dessous.
On demande des résultats sans exposant négatif ou fractionnaire, mais on ne demande pas de les simplifier.

(a) $\left(\dfrac{-3}{2x}\right)' =$

(b) $\left(x \cdot \sqrt[3]{x}\right)' =$

(c) $\left(\dfrac{x^{-2}-5}{\sqrt{x}+5}\right)'=$

(d) $\left(\sqrt{x+(x^3-x)^6}\right)'=$

Exercice 2 *(environ 21 points)*

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=-\frac{x^3-2x^2}{(x+1)^2}$, dont on donne la première et la deuxième dérivée (que vous n'avez donc pas besoin de calculer) :

$$f'(x)=\frac{-x(x^2+3x-4)}{(x+1)^3} \text{ et } f''(x)=\frac{-2(7x-2)}{(x+1)^4}$$

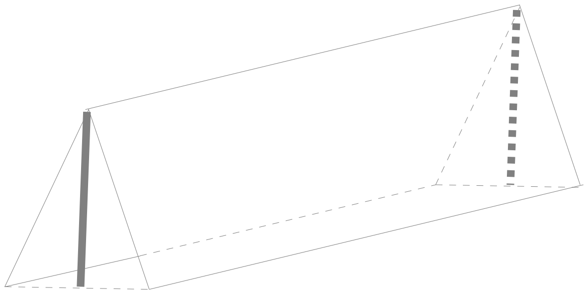
(a) Déterminer les zéros et les équations de toutes les asymptotes de *f* .

(b) Étudier la croissance de *f* et déterminer les coordonnées (*x*;*y*) des éventuels extrema.

(c) Déterminer les coordonnées $(x;y)$ des éventuels points d’inflexion.

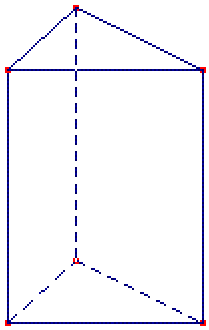
(d) Représenter graphiquement la fonction f de façon précise dans le repère ci-dessous en tenant compte des informations obtenues jusque-là :

Exercice 3 (environ 14 points)



Lors d'une promenade printanière, un groupe de collégiens, surpris par la tombée du jour, est contraint de passer la nuit dehors. Ils disposent d'une bâche de 4*m* sur 4*m* qu'ils vont plier en deux parties égales pour improviser un abri en forme de tente (voir le schéma). Convaincus de l'utilité des mathématiques et très compétents en la matière, ils vont chercher à calculer la hauteur des piquets qui permettra de donner à la tente un volume maximal.

(a) Montrer que le volume $V(x)$ de la tente en fonction de la hauteur *x* des piquets est donné par $V(x)=4x\sqrt{4-x^2}$.
Rappel: le volume d'un prisme droit est égal à l'aire de la base fois la hauteur.



(b) Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la tente est maximal.
Réponse en valeur exacte simplifiée au maximum, sans racine au dénominateur.

(c) Que vaut alors ce maximum ?
Réponse en valeur exacte simplifiée au maximum, sans racine au dénominateur.

Exercice 4 (environ 9 points)

Soit la fonction réelle f définie par $f(x)=kx^2-4$, avec $k\in\mathbb{R}^*$.

(a) Déterminer <u>à l’aide de la définition</u> le nombre dérivé de f en $a\in\mathbb{R}$.

(b) Déterminer l’équation de la tangente à f en $(1;f(1))$ et déterminer son ordonnée à l’origine.

Exercice 5 *(environ 6 points)*

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

(a) Si $f''(a)=0$, alors f admet un point d’inflexion en a.

(b) Si f est dérivable en a et t est sa tangente en $(a;f(a))$, alors $t'(x)=f'(a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.