Ma3A 2023-24 Travail 30' n°2 – Corrigé

ex1 [/15]

a) $\left(\frac{-3}{2x}\right)' = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{2x^2}$ /3

b) $\left(x\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x x^{1/3}\right)' = \left(x^{4/3}\right)' = \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$ /3

c) $\left(\frac{x^{-2}-5}{\sqrt{x}+5}\right)' = \frac{-2x^{-3}(\sqrt{x}+5)-(x^{-2}-5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+5)^2} = \frac{-2\frac{1}{x^3}(\sqrt{x}+5)-\left(\frac{1}{x^2}-5\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+5)^2}$ /4

d) $\left(\sqrt{x+(x^3+x)^6}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+(x^3+x)^6}}\cdot\left[x+(x^3+x)^6\right]'$

$= \frac{1+6(x^3+x)^5\cdot(x^3+x)'}{2\sqrt{x+(x^3+x)^6}} = \frac{1+6(x^3+x)^5(3x^2+1)}{2\sqrt{x+(x^3+x)^6}}$ /5

ex4 [/9]

a) $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(k(a+h)^2-4)-(ka^2-4)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ka^2}+2kah+kh^2\cancel{-4}\cancel{-ka^2}\cancel{+4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2ka+kh)}{\cancel{h}}$

$= 2ka$ /6

b) $t:\ y = f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=1$

$= 2\cdot k\cdot 1(x-1)+(k\cdot 1^2-4)$

$= 2k(x-1)+(k-4)$

$= 2kx-2k+k-4$

$= 2kx+\underbrace{(-k-4)}_{\text{ordonnée à l'origine}}$ /3 ex 2 $\quad f(x) = \underbrace{\dfrac{-x^3+2x^2}{x^2+2x+1}}_{\text{forme DEV}} = \underbrace{\dfrac{-x^2(x-2)}{(x+1)^2}}_{\text{forme FACT}}$ $\qquad$ a) $Z_f = \{0 ; 2\}$ /1

[/21]

a) as. vert : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-1\cdot(-3)}{0}$ " (type $\frac{1}{0}$) $\Rightarrow x=-1$ as. vert

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{+3}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{+3}{0^+} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ /3

as. obl :

$$\begin{array}{l|l} -x^3+2x^2 & x^2+2x+1 \\ \underline{-(-x^3-2x^2-x)} & -x+4 \\ \quad +4x^2+x & \\ \underline{-(+4x^2+8x+4)} & \\ \quad -7x-4 & \end{array}$$

donc $f(x) = -x+4+\dfrac{-7x-4}{x^2+2x+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x+4$

càd $y=-x+4$ as. obl. de f à $\pm\infty$

OU

$a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^3+2x^2}{x^3+2x^2+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-\cancel{x^3}(1-2/x)}{\cancel{x^3}(1+2/x+1/x^2)} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)+ax = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^3+2x^2}{x^2+2x+1} + x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-\cancel{x^3}+2x^2+(\cancel{x^3}+2x^2+x)}{x^2+2x+1}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}(+4+1/x)}{\cancel{x^2}(1+2/x+1/x^2)} = +4$

donc $y=-x+4$ est as. oblique de f à $\pm\infty$

(as. obl. à $\pm\infty$, donc pas d'as. horizontale) /4

b) Zéros de $f'(x)$: $-\dfrac{x(x-4)(x+1)}{(x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$ ou $x=-1$ $\quad (x \neq -1)$

		-4		-1		0		1	
$-x$	+	+	+	+	+	0	−	−	−
$(x+4)(x-1) = x^2+3x-4$	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$(x+1)^3$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	−	0	+	//	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	min	↗		↘	min	↗	max	↘

/5

points critiques : $f(1) = 1/4$: max en $(1; 1/4)$

$f(0) = 0$: min en $(0; 0)$

$f(-4) = \frac{32}{3}$: min en $(-4; \frac{32}{3}) \cong (-4, 10,7)$

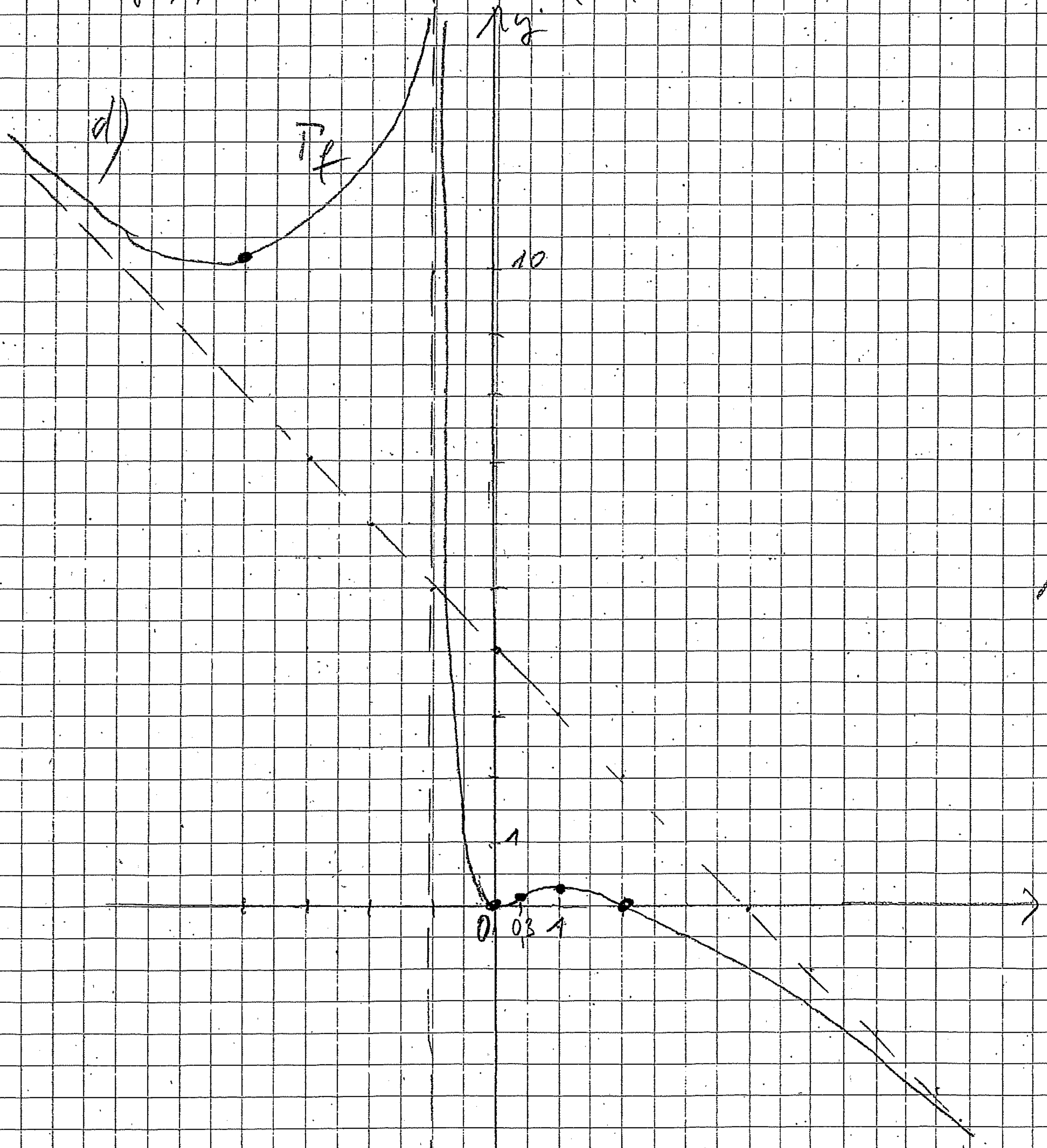
c)

x		-1		$2/7$	
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$7x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^4$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$	pt infl.	$\cap$

/4

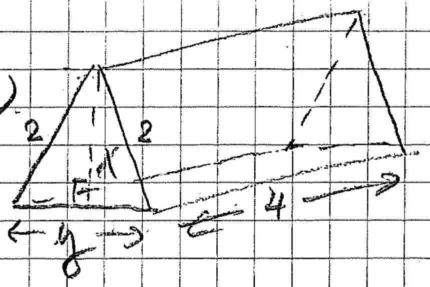
$f(\frac{2}{7}) \cong 0,08$: pt infl en $\cong (0,3; 0,08)$

d)



/4

ex3 a)



[/14]

Volume $= \frac{x \cdot y}{2} \cdot 4 = 2xy$

on sait que $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 4(4-x^2)$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4(4-x^2)} = \pm 2\sqrt{4-x^2}$

$y > 0 : y = 2\sqrt{4-x^2}$

/6

donc $V(x) = 2x \cdot 2\sqrt{4-x^2} = 4x\sqrt{4-x^2}$

b) $V'(x) = 4\sqrt{4-x^2} + 4x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)$

$= 4\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right) = 4\left[\frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right]$ /4

$= 4\frac{(4-2x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{8(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

zéros de $V'(x)$: $2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		2
$4(2-x^2)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\sqrt{4-x^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

/3

le volume est max pour $x = \sqrt{2}$ m

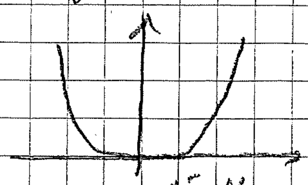
c) le volume max vaut $f(\sqrt{2}) = 4\cdot\sqrt{2}\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 8\,m^3$

/1

ex5

[/6]

a) Faux; contre exemple : $f(x) = x^4$ et $a = 0$



$f'(x) = 4x^3$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2$ $f''(0) = 0$

pas d'infl. en 0

/3

b) f dérivable [par hypothèse]

donc $f'(a)$ = pente de la tg à f en $(a ; f(a))$ [int. géom de $f'(a)$]

Or t est de degré 1, donc $t'(x)$ = pente de t $\forall x \in \mathbb{R}$ [PrD]

Donc $t'(x) = f'(a)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

cqfd, c'est vrai

/3