ex 1

[/6]

P milieu de $[AB]$

donc $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

on a : $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ [add vect]

$= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ [voir plus haut]

$= \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA})$ [soustr vect]

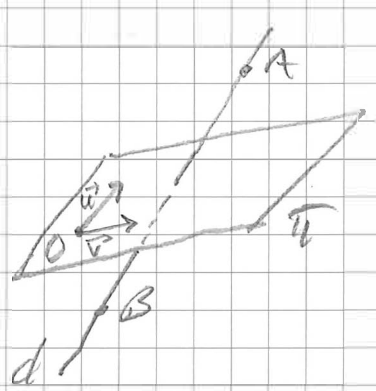
$= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OA}$

$= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$ /6

$= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

ex 2

[/10]



$d : \vec{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0+2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$ /3

$\pi : \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 0 \\ -(1\cdot 5 - 0) \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$P(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 10x - 5y + 5z = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z = 0$

/3

$I = d \cap \pi$: $2(1+\lambda) - (-2+2\lambda) + (3-2\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow 7 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7/2$

donc $x = 1 + 7/2 = 9/2$

$y = -2 + 7 = 5$

$z = 3 - 7 = -4$

$I = (9/2 ; 5 ; -4)$ /4

<u>ex 3 bis</u> Soient $d_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = z+2$ et $d_2 : \frac{x}{3} = \frac{-y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$

a) Justifie que d_1 et d_2 sont gauches

$A_1(-1; 1; -2) \in d_1$ et $\vec{v_1}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ vect dir de d_1

$A_2(0; 2; 1) \in d_2$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$ " " " d_2, car

$d_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{-2}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix}0+1\\2-1\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$[\vec{v_1}; \vec{v_2}; \overrightarrow{A_1A_2}] = \left(\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6+4\\-(4-3)\\8-9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)3 = -6 \neq 0$

donc d_1 et d_2 sont gauches

b) $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ directeurs de Π_1 et Π_2

$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ normal à Π_1 et Π_2

on choisit Π_1 par A_1 : $P(x;y;z) \in \Pi_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z+2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2x - y - z - 3 = 0$

c) $\Pi_2 : -2x - y - z = 0$ (même vecteur normal et équations non équiv.)

d) $\delta(d_1; d_2) = \delta(\Pi_1; A_2) = \frac{|-2\cdot 0 - 2 - 1 - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$

ou

$\delta(d_1; d_2) = \frac{|[\vec{v_1}; \vec{v_2}; \overrightarrow{A_1A_2}]|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|} = \frac{|-6|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

ex 4

$\left[\;/24\right]$

a) M_1 = milieu de $[AB] = \left(\frac{0-2}{2}; \frac{4+4}{2}; \frac{-1-5}{2}\right) = (-1; 4; -3)$

M_2 = " " $[BC] = \left(\frac{-2+2}{2}; \frac{4+2}{2}; \frac{-5-5}{2}\right) = (0; 3; -5)$

M_3 = " " $[CD] = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-5-1}{2}\right) = (1; 1; -3)$ $\quad /4$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{CD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$

Π_1 par M_1 de vecteur normal $\vec{AB}$: $\begin{pmatrix}x+1\\y-4\\z+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 4z - 14 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2z + 7 = 0$ $\quad /2$

Π_2 par M_2 " " " $\vec{BC}$: $\begin{pmatrix}x\\y-3\\z+5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 2y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$ $\quad /2$

Π_3 par M_3 " " " $\vec{CD}$: $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2x - 2y + 4z + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 2z - 8 = 0$ $\quad /2$

b) ① $x + 2z + 7 = 0$

② $2x - y + 3 = 0$

③ $x + y - 2z - 8 = 0$

① + ③ = ④ : $2x + y - 1 = 0$

② $2x - y + 3 = 0$

$4x + 2 = 0$

$x = -1/2$

dans ② $-1 - y + 3 = 0$

$y = 2$

dans ① $-1/2 + 2z + 7 = 0$

$z = -13/4$

$I = \left(-\frac{1}{2}; 2; -\frac{13}{4}\right)$ $\quad /5$

c) $r = \|\vec{AI}\| = \|\vec{BI}\| = \|\vec{CI}\| = \|\vec{DI}\|$

par ex : $\|\vec{AI}\| = \left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-0\\2-4\\-\frac{13}{4}+1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-2\\-\frac{9}{4}\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+4+\frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{149}{16}} = \frac{\sqrt{149}}{4}$ $\quad /3$

d) $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (y+3)^2 = 149/16$ $\quad /2$

e) $V_{ABCD} = \left|\frac{1}{6}\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\begin{pmatrix}-8\\-16\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\right|$ $\quad /4$

$= |1/6 \cdot 64| = 32/3$

ex 5

[/8]

a) faux

contre-ex : $[\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}] = (\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1$

$[\vec{k}; \vec{j}; \vec{i}] = (\vec{k} \times \vec{j}) \cdot \vec{i} = -\vec{i} \cdot \vec{i} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -1$

/4

b) vrai $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \pi$ (thm vect normal plan)

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vect dir de d (cf éq. vect de d)

donc $d \perp \pi$

/4