# Épreuve semestrielle de mathématiques

Date : 15 décembre 2023

| **Nom :** | **Prénom :** | **Groupe :** |
|---|---|---|

**Cours :** 3MA2.DF01-02.

**Mode d'impression :** recto-verso.

**Durée :** 160 minutes.

**Annexe :** aucune.

**Nombre de pages de l'énoncé :** 4 pages.

**Nombre de points de l'épreuve :** 82 points.

| **Documents et matériel autorisés** | |
|---|---|
| **Mis à disposition par le collège :** | **Personnels à l'élève :** |
| Feuilles quadrillées. | Calculatrice personnelle TI-30X Pro ou modèle équivalent (non graphique, non programmable) ; table CRM personnelle non annotée. |

**Indications et directives :**

i) Tous les calculs et les étapes de raisonnement doivent figurer sur la copie.

ii) **2 points** seront attribués à la qualité de la rédaction et de l'écriture mathématique.

---

| |
|---|
| Respect des consignes, mise en évidence des résultats et respect des notations mathématiques usuelles : Nombre de points : . . . /2 pts |

## Exercice 1 *(7 points)*

En utilisant les formules de dérivation, calculer la dérivée des fonctions suivantes.

i) $f(x) = \sin\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right)$

ii) $f(x) = \sqrt{4\sin(x)\cdot\cos(x)}$

*Il n'est pas demandé de simplifier les résultats.*

/7 points

## Exercice 2 *(13 points)*

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2+1}$. Déterminer les equations de ses asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

/13 points

**Exercice 3** *(18 points)*

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + x}$, dont on donne la première et la deuxième dérivée (que vous n'avez donc pas besoin de calculer) :

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)}{(x-1)^3} \qquad f''(x) = \frac{4(x-4)}{(x-1)^4}.$$

i) Déterminer toutes les asymptotes (équations) et/ou les "trous" (coordonnées) de $f$.

ii) Étudier la croissance de $f$ et déterminer les coordonnées $(x; y)$ des éventuels extrema.

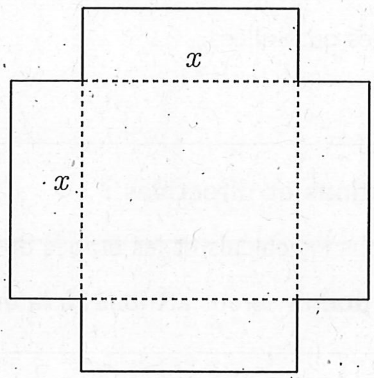
iii) Déterminer les coordonnées $(x; y)$ des éventuels points d'inflexion.

iv) Représenter graphiquement la fonction $f$.

/18 points

**Exercice 4** *(11 points)*

On veut construire une boîte en aluminium sans couvercle de 500 cm$^3$ de volume. La boîte est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté $x$ cm et son patron est représenté ci-contre.




i) Exprimer la surface totale de cette boîte en fonction de $x$.

ii) Quelles doivent être les dimensions de cette boîte pour que cette surface soit minimale ?

*Indication : Si vous n'avez pas trouvé de réponse pour (i), vous pouvez utiliser la fonction*

$$S(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$$

*[qui n'est pas la réponse correcte pour (i)] pour répondre aux questions (ii) et (iii).*

iii) Si cette boîte est en aluminium et que l'aluminium coûte 100 francs par m$^2$, calculer le prix de cette boîte de surface minimale.

/11 points

**Exercice 5** *(8 points)*

Vrai ou faux ? Justifier.

i) Si $f(x) < 0$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in ]c; d[$, alors $f''(x) < 0$ pour tout $x \in ]c; d[$.

ii) Pour tout $b, c \in I\!R$ et $a \neq 0$ la fonction $f$ définie par $f(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + bx + c$ possède deux points d'inflexion.

/8 points

**Exercice 6** *(10 points)*

Représenter graphiquement ci-dessous une fonction $f$ qui vérifie toutes les conditions suivantes.
*Précision : on demande bien une seule fonction qui vérifie toutes les conditions et non une fonction pour chaque condition.*

i) L'ensemble $Z_f$ des zéros de $f$ est $\{-3; 1; 3\}$

ii) $f(0) = 4$

iii) $y = x - 3$ est une asymptote oblique de $f$ à $+\infty$

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

v) $f$ n'est pas définie en $x = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

vi) $f'(0) = 0$

vii) $f$ est définie en $x = 4$ et $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ n'existe pas

viii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

ix) $f$ est définie mais pas dérivable en $x = 6$

x) $f'(-5) \neq 0$ et $f''(-5) = 0$

xi) $f'(x)$ est strictement positive sur l'intervalle $]-6; -4[$

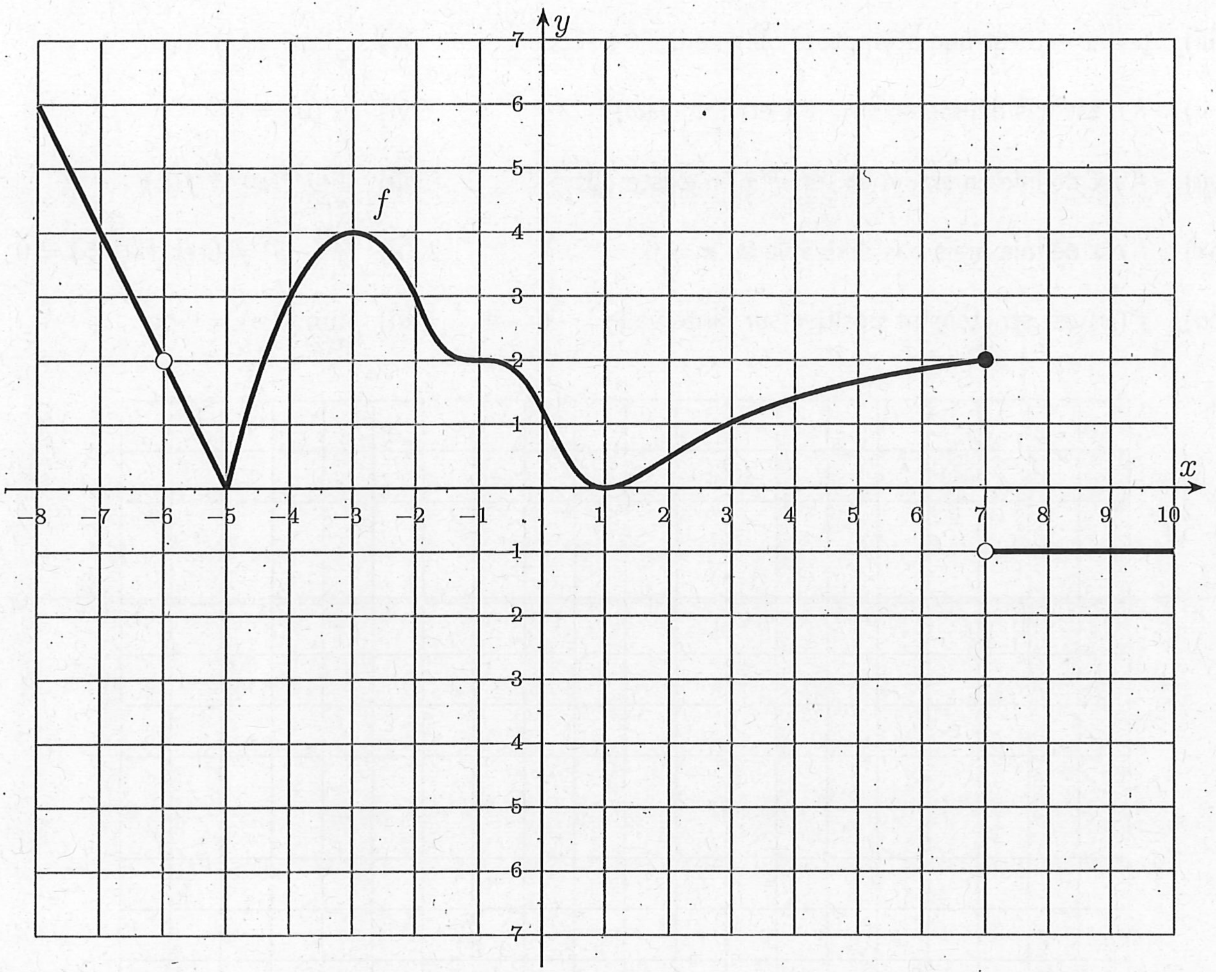
xii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

/10 points

**Exercice 7** *(13 points)*

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction $f$. Représenter graphiquement dans le même repère la dérivée $f'$ de $f$.

*Les traits de construction qui ont servis à élaborer cette esquisse doivent être apparents.*




/13 points