Semestrielle décembre 2023 3ITA2 1

Exo 1 : i) $\left(\sin\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right)\right)' = \boxed{\cos\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right)\cdot 2\left(\frac{2x-1}{x}\right)\cdot\frac{2x-(2x-1)}{x^2}}$ (1) (1) (2)

ii) $\left(\sqrt{4\sin(x)\cdot\cos(x)}\right)' = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{4\sin(x)\cos(x)}}\cdot\left(4\cos(x)\cdot\cos(x)+4\sin(x)\cdot(-\sin(x))\right)}$ (1) (2)

Exo 2 : I) * $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2+\sqrt{x^2+1}}{x}$ (1)

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2+\overbrace{|x|}^{=x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}} = \boxed{2}$ (1) (1)

* $q = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-m.x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2+1}-2x\right)$ (1)

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x+\sqrt{x^2+1}\right)\frac{2-x-\sqrt{x^2+1}}{2-x-\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2-x)^2-(x^2+1)}{2-x-\sqrt{x^2+1}}$ (1)

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-4x+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}{2-x-\underbrace{|x|}_{=x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{3}{x}-4\right)}{\cancel{x}\left(\frac{2}{x}-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \frac{-4}{-1-1} = \boxed{2}$ (1) (1)

Réponse : f admet l'asymptote oblique d'équation $\boxed{y = 2x+2 \text{ à } +\infty}$ (1)

II) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{x+2-\sqrt{x^2+1}}{x+2-\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2-(x^2+1)}{x+2-\underbrace{|x|}_{=-x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$ (1) (1)

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+4x+4-\cancel{x^2}-1}{x\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(4+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \frac{4}{1+1} = \boxed{2}$ (1) (1)

Réponse : f admet l'asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 2 \text{ à } -\infty}$ (1)

Exo 3 : i) $f(x) = \dfrac{x(2x-4)}{x(x^2-2x+1)} = \dfrac{x(2x-4)}{x(x-1)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

$*\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}(2x-4)}{\cancel{x}(x-1)^2} = \dfrac{-4}{1} = -4 \Rightarrow \boxed{\text{"trou" en } (0;-4)}$ 1 1

$*\ \lim\limits_{x\to 1^\pm} \dfrac{\cancel{x}(2x-4)}{\cancel{x}(x-1)^2} = \left[\dfrac{-4}{(0^\pm)^2}\right] = \left[\dfrac{-4}{0^+}\right] = -\infty \Rightarrow$ f admet l'asymptote verticale $\boxed{x=1}$ 1 1

$*\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}(2-\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{\to 0})}{x^{\cancel{3}}(\underbrace{1-\tfrac{2}{x}+\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0})} = \left[\dfrac{2}{\pm\infty}\right] = 0 \Rightarrow$ f admet l'asymptote horizontale $\boxed{y=0}$ 1 1

ii) $Z_{f'} = \{3\}$, $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ 1

iii) $Z_{f''} = \{4\}$, $D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ 1

		1		3	
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	///	$+$	0	$-$
f	↘	///	↗	1/2	↘

1 1

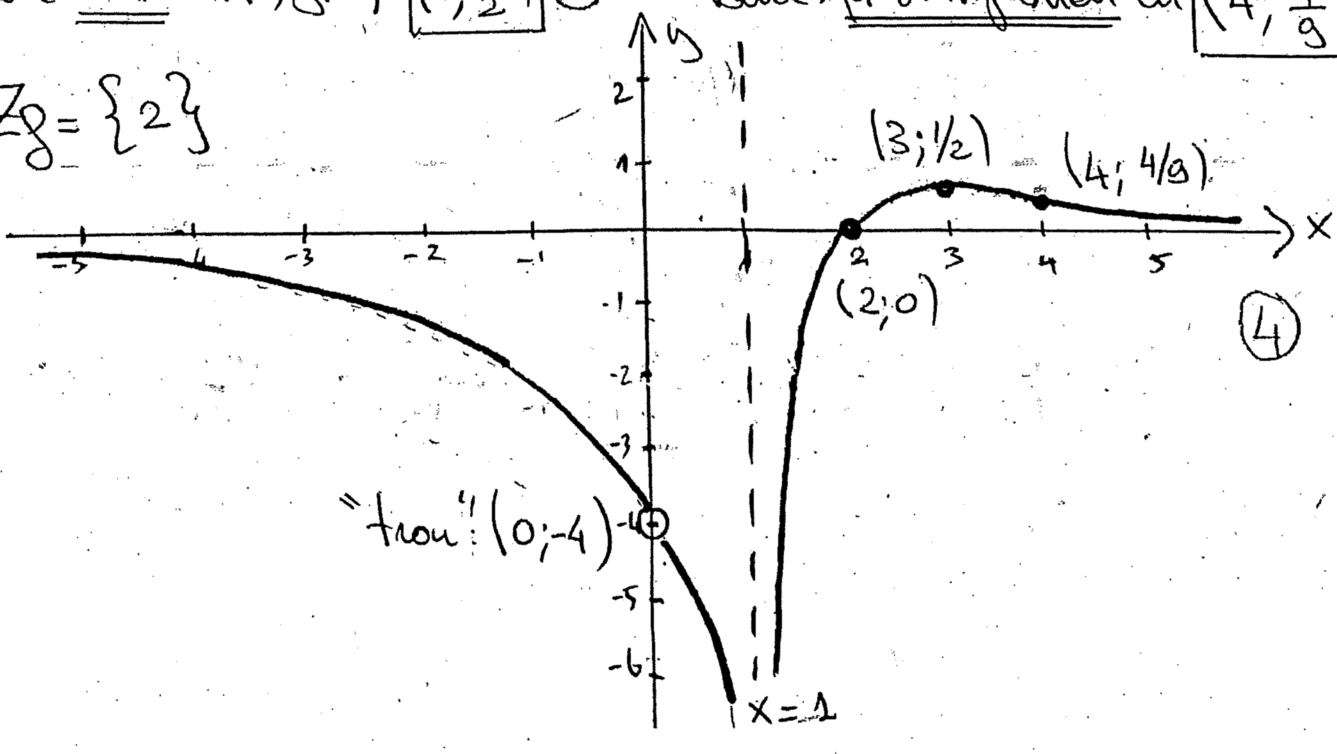
Donc : MAX en $(3; f(3)) = \boxed{(3;\tfrac{1}{2})}$ 1

		1		4	
$4(x-4)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^4$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	///	$-$	0	$+$
f	$\cap$	///	$\cap$	4/9	$\cup$

1 1

Donc : pt. d'inflexion en $\boxed{(4;\tfrac{4}{9})}$ 1

$Z_f = \{2\}$



Exo 4: i) h = hauteur de la boîte $\Rightarrow V = x^2 \cdot h = 500$ (1)

$\Leftrightarrow \boxed{h = \dfrac{500}{x^2}}$ (1) Donc la surface est donnée par la (1) fonction $S(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \dfrac{500}{x^2} = \boxed{x^2 + \dfrac{2'000}{x}}$

$x^2 + 4 \cdot x \cdot h$ (1)

ii) $S'(x) = 2x + 2000 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (1) et $S'(x) = 0$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2000}{x^2} = 2x$

$\Leftrightarrow 2x^3 = 2000 \Leftrightarrow x^3 = 1'000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1000} = \boxed{10}$ (1)

ii) $S'(x) = 2x + 2000\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2x^3 - 2000}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 1000)}{x^2}$ /3

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10$

x	0		10	
$x^3 - 1000$		$-$	0	$+$
x^2	0	$+$	$+$	$+$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$
$S(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

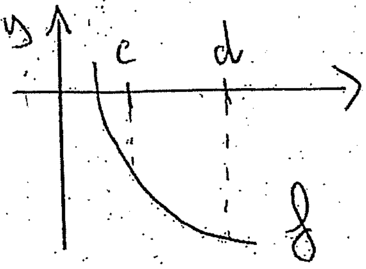
/1

réponse: $x = 10$ [cm] et $h = \dfrac{500}{10^2} = 5$ [cm] /1

iii) $S_{min} = S(10) = 300$ [cm²] $= 0{,}03$ [m²] $\Rightarrow 100 \cdot 0{,}03 = 3$

Réponse: $\boxed{\text{le prix de la boîte de surface minimale} = 3.-}$ (2)

Exo 5 : i) $\boxed{\text{Faux}}$, contre exemple



(3)

* $f(x)<0$: "graphe en dessous de Ox"
* $f'(x)<0$: décroissante
* Cependant : $f''(x)>0$, convexe

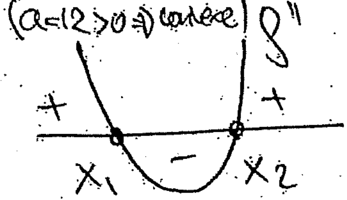
ii) $f'(x) = 4x^3+3ax^2-2x+b$ et $f''(x) = 12x^2+6ax-2$ (1)

On : $f''(x)=0$ (1), $\Delta = (6a)^2-4\cdot 12\cdot(-2) = 36a^2+96 > 0 \ \forall a \neq 0$ (1)

Donc : $\forall a,b \in \mathbb{R}$ et $a\neq 0$, f'' possède deux zéros (1)

$$x_1 = \frac{-6a+\sqrt{36a^2+96}}{24}$$

$$x_2 = \frac{-6a-\sqrt{36a^2+96}}{24}$$



Comme f'' est de degré 2, elle change de signe en x_1 et x_2 (1)

$\Rightarrow \boxed{\text{VRAI}}$, f possède deux pts d'inflexion

Exercice 6 *(10 points)*

Représenter graphiquement ci-dessous une fonction f qui vérifie toutes les conditions suivantes.
Précision : on demande bien une seule fonction qui vérifie toutes les conditions et non une fonction pour chaque condition.

1 ~~i)~~ L'ensemble Z_f des zéros de f est $\{-3; 1; 3\}$

1 ~~iii)~~ $y = x - 3$ est une asymptote oblique de f à $+\infty$

1 ~~v)~~ f n'est pas définie en $x = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

1 ~~vii)~~ f est définie en $x = 4$ et $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ n'existe pas

1 ~~ix)~~ f est définie mais pas dérivable en $x = 6$

1 ~~xi)~~ $f'(x)$ est strictement positive sur l'intervalle $]-6; -4[$

~~ii)~~ $f(0) = 4$ 0.5

~~iv)~~ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ 0.5

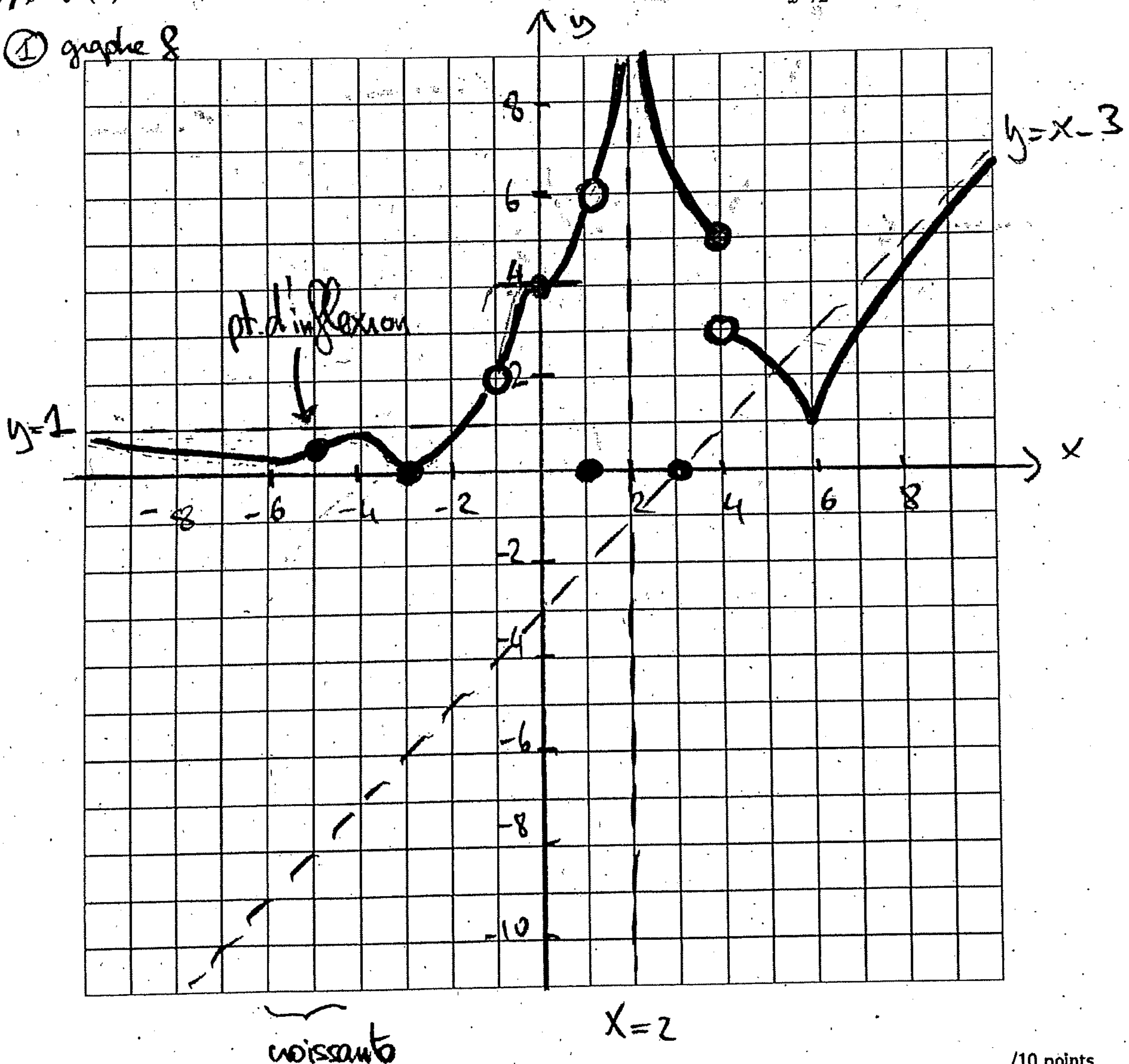
~~vi)~~ $f'(0) = 0$ 0.5

~~viii)~~ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ 0.5

~~x)~~ $f'(-5) \neq 0$ et $f''(-5) = 0$ 0.5

~~xii)~~ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ 0.5

1 graphe 8

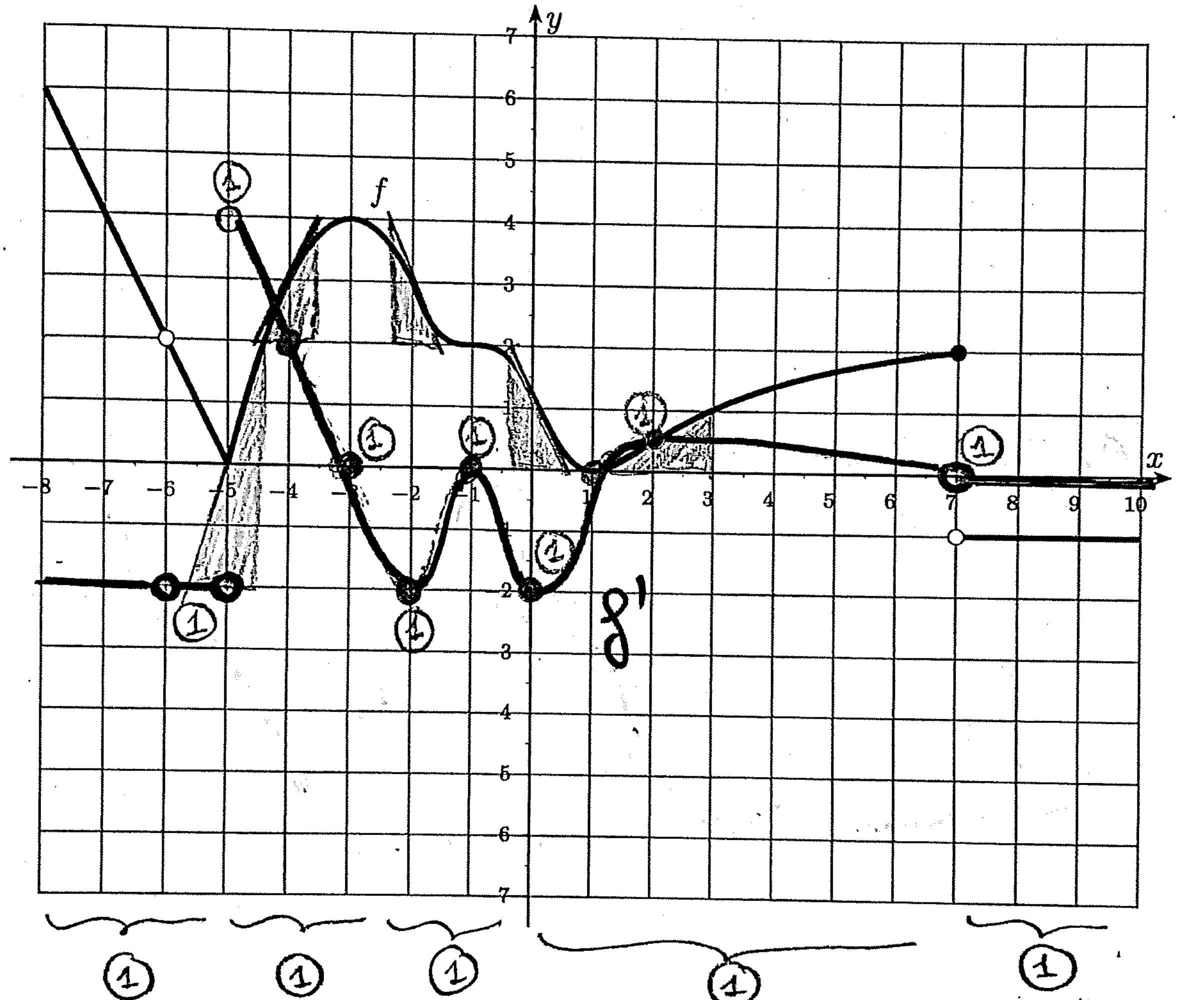


/10 points

Exercice 7 *(13 points)*

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction f. Représenter graphiquement dans le même repère la dérivée f' de f.

Les traits de construction qui ont servis à élaborer cette esquisse doivent être apparents.



/13 points