Collège de Saussure

Examen semestriel de mathématique - Troisième année - Niveau normal

Date : décembre 2008

Durée : 160 minutes

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 3MA1.DF1

Nom de l'élève : ....

Prénom de l'élève : ....

Matériel autorisé
- Calculatrice non programmable personnelle TI82
- Table numérique

Remarques
- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner les détails des calculs.
- Sauf indication contraire dans un énoncé d'exercice, lorsque cela est possible, on donne les résultats en valeur exacte simplifiée au maximum puis en valeur arrondie au centième
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ ...... / .....

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ ...... / .....

Total des points des exercices : .... / ......

Total des points de l'épreuve : .... / ......

Note : / 6

Commentaires du professeur sur le travail

Commentaires de l'élève sur son travail

Rappel : reporter les commentaires du professeur et les vôtres dans votre suivi individualisé des évaluations sur le site http://icp.ge.ch/po/de-saussure-base/delley/

Début du travail

Exercice 1(environ 1 point)

Déterminer la dérivée de la fonction réelle f définie par $f(x)=2x-3x^2$ en utilisant la définition de la dérivée et non les formules de dérivation.

Exercice 2(environ 3 points)

Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-4}{x-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{9x}-3}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-2x+7}{x^3+3x}$

Exercice 3(environ 4 points)

On considère la fonction réelle f définie par $f(x)=\dfrac{5}{x+1}$.

a) Etudier $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b) Esquisser une représentation graphique de f

c) Déterminer l’équation de la tangente à f au point $(3\,;f(3))$

d) Déterminer la (les) équation(s) de la (des) tangente(s) à f dont la pente vaut -5

Exercice 4(environ 2.5 points)

En utilisant les formules vues au cours, déterminer les dérivées des fonctions réelles suivantes; donner une réponse factorisée au maximum et ne comprenant aucun exposant négatif ou fractionnaire:

a) $f(x)=\dfrac{3x-4x^2}{x^3}$ b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ c) $f(x)=(x^4-4)^6\cdot x^8$

Exercice 5(environ 2 points)

Vrai ou faux? Justifier précisément.

a) Si f est la fonction réelle définie par $f: x\mapsto\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2}$, alors f est une fonction polynomiale.

b) Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, alors f est continue en x

Exercice 6(environ 4 points)

On considère le théorème sur la relation entre « dérivabilité en x » et « continuité en x »

a) Enoncer précisément ce théorème en identifiant hypothèses et conclusions
b) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème; donner les arguments qui manquent [directement sur l'énoncé] et compléter lorsque c'est nécessaire :

Démonstration :

On commence par écrire $f(x+h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h + [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Cette égalité est vraie pour $[\ldots\ldots] \neq 0$

On a alors :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \left([\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \cdot h + f(x)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \cdot \lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} [\ldots\ldots\ldots]$$

car [ARG 3 : ....
....
....]

Or on a :

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = [\ldots\ldots\ldots]$, car [ARG 4 : ....
....
....]

- $\lim_{h\to 0} h = [\ldots\ldots\ldots]$, car [ARG 5 : ....
....
....]

- $\lim_{h\to 0} f(x) = [\ldots\ldots\ldots]$, car [ARG 6 : ....
....
....]

On en déduit donc que :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = [\ldots\ldots\ldots\ldots] \cdot [\ldots\ldots\ldots\ldots] + [\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$= [\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

Ceci signifie que $[\ldots\ldots\ldots\ldots]$ est $[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$ en $[\ldots\ldots\ldots\ldots]$

car [ARG 8 : ....
....
....]

c) Enoncer la réciproque de ce théorème.
d) Cette réciproque est-elle vraie? Justifier (une approche graphique suffit)

Exercice 7(environ 2 points)

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction réelle f .

Tracer soigneusement une représentation graphique de la fonction dérivée $f^{'}$ de f dans le repère supplémentaire fourni ci-dessous :