Ma3N - 2008 - Corrigé TR 90' n° 2

1. |/19|

(b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3+(x+h)+1-(x^3+x+1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3}+3xh^2+3x^2h+h^3+\cancel{x}+h+\cancel{1}-\cancel{x^3}-\cancel{x}-\cancel{1}}{h}$

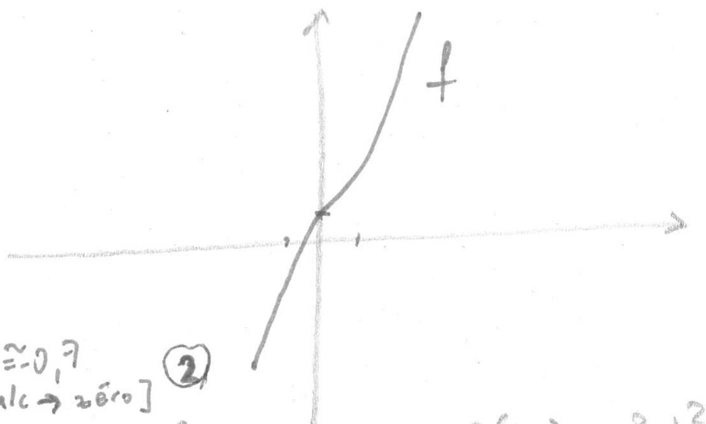
$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3xh+3x^2+h^2+1)}{\cancel{h}}$

$= \lim_{h\to 0} (3xh+3x^2+h^2+1) = 3x^2+1$ (5)

(2)

(a) $(x^3+x+1)' = 3x^2+1$

(c)



(2)

(d) $x \cong -0{,}7$
[calc → zéro] (2)

(e) $y = ax+b$ avec $a = f'(1) = 3\cdot 1^2+1 = 4$

donc $y = 4x+b$

$(1; f(1)) = (1;3) \in t \Leftrightarrow 3 = 4\cdot 1 + b$

$\Leftrightarrow b = -1$

$\boxed{y = 4x-1}$ (4)

(f) On veut $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+1=0$

$3x^2 = -1$

$S = \emptyset$ (4)

2. [/17]

a) $\left(\frac{8}{-2x^3}\right)' = \left(-\frac{4}{x^3}\right)' = -4\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -4\cdot\frac{-(x^3)'}{(x^3)^2} = 4\cdot\frac{3x^2}{x^6} = \frac{12}{x^4}$ (3)

b) $(\sqrt{2x})' = \frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot(2x)' = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ (3)

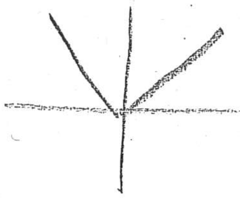
c) $$\begin{aligned}((2-3x^2)^5+7)' &= 5(2-3x^2)^4\cdot(2-3x^2)' \\ &= 5(2-3x^2)^4\cdot(-6x) \\ &= -30x(2-3x^2)^4\end{aligned}$$ (4)

(d) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(\cancel{x^2}+1-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ (4)

(e) $\left(\frac{\sqrt{x^4}}{x^3}\right)' = \left(\frac{x^2}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (3)

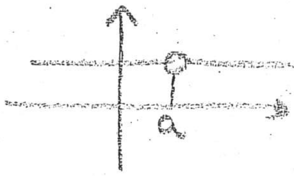
3. [/8]

a) Faux (1+3)
C-ex:



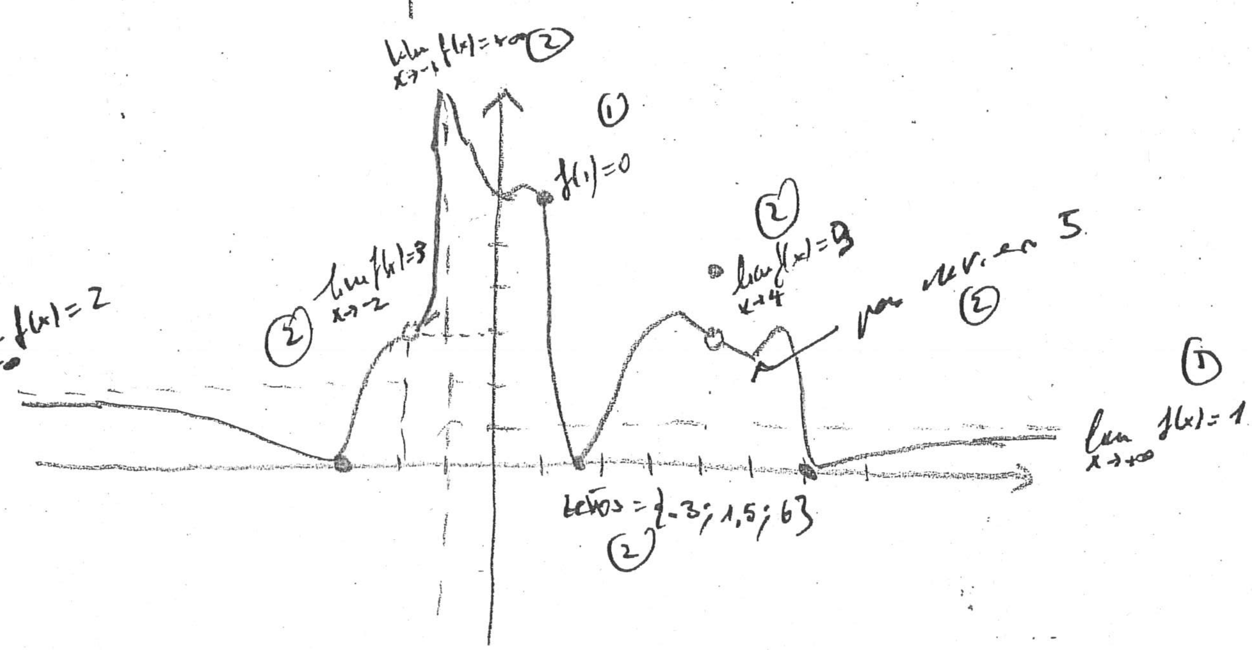
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto|x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 !

b) Faux (1+3)
C-ex:



$\lim_{x\to a} f(x)$ $\exists$, mais $a\in D_f$

4. [/13]



5. a) Si $\begin{cases} f: I \to \mathbb{R}, \\ g: I \to \mathbb{R} \end{cases}$ avec $x \in I$ sont dérivables en x, $\Big\}$ HYP

(5)

alors : $f \cdot g$ est aussi dér. en x et on a :

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\Big\}$ CONCL

b) Démonstration :

(15)

$$(f\cdot g)'(x)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(f\cdot g)(x+h)] - (f\cdot g)(x)}{h}$$ (1)

car [Arg1: déf $f'(x)$] (1)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)] - (f(x)\cdot g(x))}{h}$$ (1)

car [Arg2: déf $f\cdot g$] (2)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) + [f(x+h)\,g(x)] - f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$ 1

car [Arg3: on a ajouté 0] (1)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + [f(x+h)\,g(x)]}{h}$$ (1)

~~car [Arg4:]~~

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot(g(x+h) - [g(x)]) + g(x)\cdot([f(x+h)] - f(x))}{h}$$ (2)

car [Arg4: mise en évidence] (1)

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)\cdot(g(x+h) - [g(x)])}{h} + \frac{g(x)\cdot([f(x+h)] - f(x))}{h} \right)$$

car [Arg6: add. des fractions] (1)

$$= \lim_{h\to 0} \left(f(x+h)\cdot\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} + [g(x)]\cdot\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right)$$ (1)

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)\cdot(g(x+h) - g(x))}{h} \right) + [\lim_{h\to 0}] \left(g(x)\cdot\frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right)$$ (1)

car [Arg7: thm lim : ok si 2 nouvelles limites existent] (2)

./.

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\right)\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left(g(x)\right)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right),$$ (1)

On a :

- $\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\right)=[\ldots f(x) \ldots]$ (1)

  car [Arg8: f dér. par hyp., donc f cont [théo] + déf. de continue en x] (3)

- $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=[\ldots g'(x) \ldots]$ (1)

  car [Arg9: déf g'(x) + g dér. en x par] hyp (2)

- $\lim_{h\to 0}\left(g(x)\right)=[\ldots g(x) \ldots]$ (1)

  car [Arg10: g(x) cte en h] (2)

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=[\ldots f'(x) \ldots]$ (1)

  car [Arg11: déf f'(x) + f dér. en x par] hyp. (2)

Donc $(f\cdot g)'(x) = f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x) = f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)$

30 pts ; je divise par 2 : $\to \frac{30}{2} = \underline{15\text{ pts}}$