tot 39   not 2

MATH 3N – Corrigé test 3   45'   février 2008

(Remarque : on peut simplifier $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x}$ dès le départ pour $x \neq 0$!)

- D_f : $x - x^2 = 0$
  $x(1-x) = 0$
  (4) $x = 0$ ou $x = 1$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

- zéros : $x^3 - 4x = 0$
  $x(x^2-4) = 0$
  (4) $x(x-2)(x+2) = 0$
  $\cancel{x=0}$ ou $x = 2$ ou $x = -2$ $Z_f = \{-2;2\}$

(• $f(0) \not\exists$)

- a.v.   candidats $x = 0$ et $x = 1$

(3) $x = 0$: type $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3-4x}{x-x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x-2)(x+2)}{\cancel{x}(1-x)} = \frac{-4}{1} = -4$

pas d'as. vert en $x = 0$

(4) $x = 1$: type $\frac{1}{0}$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{-3}{1 \cdot 0^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-3}{1 \cdot 0^+} = -\infty$ $\Big\}$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \not\exists$

as. vert $x = 1$

- $\deg(\text{num}) = \deg(\text{den}) + 1$
  $\Rightarrow$ as. obl et pas d'as. horiz :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 4x & x - x^2 \\
- & +x^3 - x^2 & -x - 1 \\
\hline
 & x^2 - 4x & \\
- & x^2 - x & \\
\hline
 & -3x &
\end{array}
$$

(6)

donc $\frac{x^3-4x}{x-x^2} = -x - 1 + \frac{-3x}{x-x^2}$

càd $f(x) - (-x-1) = -\frac{3x}{x-x^2}$

d'où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (-x-1)] = 0$

$y = -x - 1$ as. obl. de f à $\pm\infty$

- $f'(x) = \frac{(3x^2-4)(x-x^2) - (x^3-4x)\cdot(1-2x)}{(x-x^2)^2}$

$= \frac{x(3x^2-4)(1-x) - x(x^2-4)(1-2x)}{[x(1-x)]^2}$

$= \frac{\cancel{x}[(3x^2-4)(1-x) - (x^2-4)(1-2x)]}{x^{\cancel{2}}(1-x)^2}$

$= \frac{3x^2 \cancel{-4} - 3x^3 + 4x - x^2 \cancel{+4} + 2x^3 - 8x}{x(1-x)^2}$

(6) $= \frac{-x^3 + 2x^2 - 4x}{x(1-x)^2} = -\frac{x(x^2-2x+4)}{x(1-x)^2}$ $\left(\underset{\text{si } x \neq 0}{=} -\frac{x^2-2x+4}{(1-x)^2} \right)$

• zeros de x^2-2x+4 ? $\Delta = 4-4\cdot4<0$

$S=\emptyset$

• tds f' :

4

x		0		1	
$-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2-2x+4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(1-x)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	//	$-$	//	$-$
$f(x)$	$\searrow$	//	$\searrow$	//	$\searrow$

• $f''(x) = \dfrac{6x}{x(x-1)^3}$

tds f'' :

3

x		0		1	
$6x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	//	$-$	//	$+$
$f(x)$	$\frown$	//	$\frown$	//	$\smile$

• repr. graphique :

5