MATH 3N Corrigé travail du 12.3.09

tot 89

not: 3

fr 2

Ex 1 : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

[/29]

- D_f : $x+1=0$, $x=-1$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (2)
- Z_f : $x^2+3=0$ $\cancel{\ }$ $\quad Z_f=\emptyset$ (2)
- $f(0)=3$ (1)
- as. vert : $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$ donc $x=-1$ as. vert de f (3)
- as obl / horiz : degré (num) = degré (dén) + 1 donc as. obl et non horiz :

$$\begin{array}{r|l} x^2+3 & x+1 \\ \hline -\ (x^2+x) & x-1 \\ -x+3 & \\ -\ (-x-1) & \\ 4 & \end{array}$$

d'où $\dfrac{x^2+3}{x+1}=x-1+\dfrac{4}{x+1}$

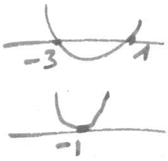
donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0$ (5)

donc $y=x-1$ as. obl. de f à $\pm\infty$

- $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ (3)

- $Z_{f'}=\{-3;1\}$

x		-3		-1		1	
x^2+2x-3	+	0	−	−	−	0	+
$(x+1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	//	−	0	+
$f(x)$	↗	M	↘	//	↘	m	↗



(4)

$f(-3)=\dfrac{12}{-2}=-6 \Rightarrow$ Max: $(-3;-6)$ (2)

$f(1)=\dfrac{4}{2}=2 \Rightarrow$ min : $(1;2)$

• $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$ (calcul : $f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x+3)(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}$

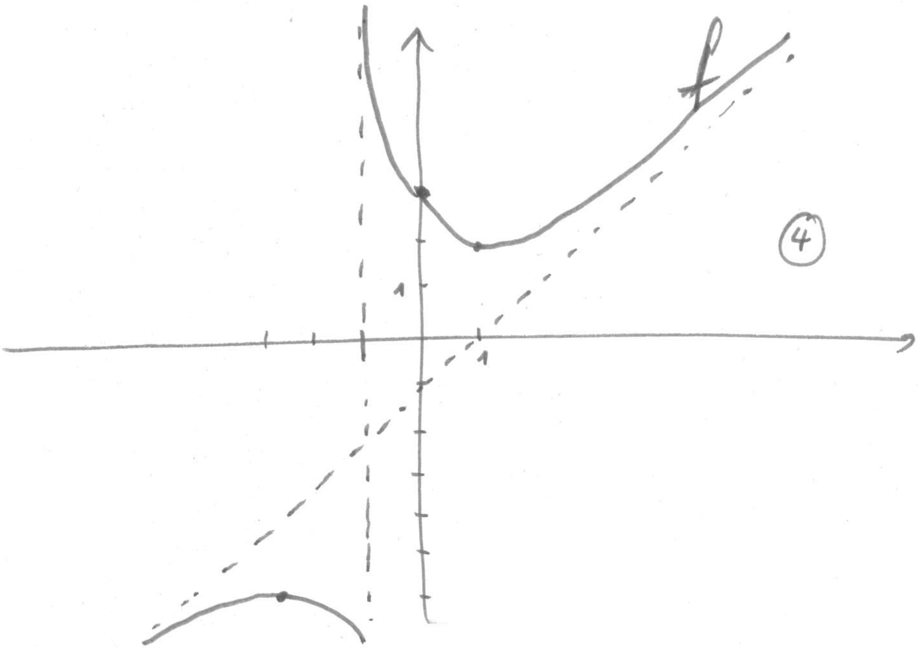
$= \frac{2(x+1)^3 - 2(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+1)^4}$

$= \frac{2\cancel{(x+1)}\left[(x+1)^2 - (x+3)(x-1)\right]}{(x+1)^{\cancel{4}3}}$

$= \frac{2(\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 - \cancel{x^2} - \cancel{2x} + 3)}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}$)

x		-1	
8	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	//	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

3



4

Ex 2 : (/17)

• x, y les 2 nombres
• à opt : $x^2 - y^2$
• on sait : $x \cdot y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{x}$
• donc $f(x) = x^2 - \left(\frac{10}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^4 - 100}{x^2}$

6

• $f'(x) = 2x - 100\left(-\frac{2x}{x^{\cancel{4}3}}\right) = 2x + \frac{200}{x^3} = \frac{2x^4 + 200}{x^3}$

$= \frac{2(x^4 + 100)}{x^3}$

4

• zero de f' : $\cancel{Z}_{f'} = \emptyset$

x		0	
$2(x^4+100)$	$+$	$+$	$+$
x^3	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	//	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

4

Il n'y a ni max, ni min !

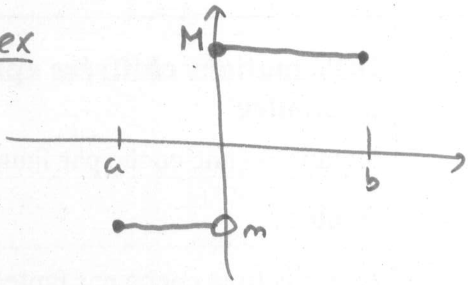
3

[/11] Ex 3

a) Faux

C-ex

(1+4)



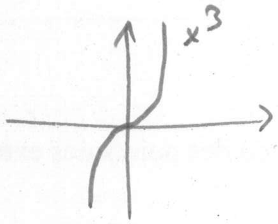
$f([a;b])$ n'est pas un intervalle fermé du type $[m;M]$

car $f([a;b]) = \{m; M\}$

b) Faux

C-ex

(1+5)



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

donc en $\cancel{x} = 0$:

$f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$

mais f n'admet pas d'extr local en 0 :

si $x > 0$, $x^3 > 0$

si $x < 0$, $x^3 < 0$

1/29) Ex4

a) HYP. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ telle que f dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$

Si $f'(x) > 0, \forall x \in]a;b[$, alors f str ↑ sur $[a;b]$

Si $f'(x) < 0, \forall x \in]a;b[$, alors f str ↓ sur $[a;b]$

Si $f'(x) = 0, \forall x \in]a;b[$, alors f cte sur $[a;b]$

CONCL

5

b)

Démonstration pour le cas où on a $f'(x) < 0$ sur $]a;b[$:

On choisit x et y ∈ [a;b] quelconques, avec x < [.....y.....]. 1

On a:

- f est dérivable sur]x;y[, car [ARG 1: f l'est sur [a;b] par hypothèse.........]
- f est [..continue...] sur [x;y], car [ARG 2: f l'est sur [a;b] par hyp..........] 4

On peut appliquer le théorème [.....des accr. finis..........] à la fonction [...f...] sur l'intervalle [x;y] 2

car [ARG 3: les hypothèses du thm des AF sont vérifiées..........] 2

Il existe un c∈[...]x;y[.....] tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{[...y-x...]}$, 2

car [ARG 4: c'est la conclusion du thm des AF..........] 2

ce qu'on peut aussi écrire : [.......f'(c).......](y – x) = f(y) – f(x) 1

car [ARG5: On a multiplié par (y–x)..........] 1

Or, on sait que:

- y – x [...>...] 0, car [ARG 6: on a choisit x < y..........]
- f '(c) < [.......0.......], car [ARG 7: par hypothèse..........] 4

donc f(y) – [....f(x)....] < 0 1

car [ARG 8: règle des signes : $\frac{-}{+} = -$..........] 1

c'est-à-dire f(y) [.....<.....] f(x), pour tout choix de x et y avec x<y. 1

C'est ce qu'il fallait démontrer, car [ARG 9: c'est la définition de la décroissance stricte..........] 2

24 p5