Collège de Saussure | Année scolaire 2011-2012

ÉPREUVE SEMESTRIELLE DE MATHÉMATIQUES Date : 15 décembre 2011

Nom:	**Prénom:**	
Groupe :	**Points:**	**Note:**

Cours (sigle) : 3MA1.DF02 et 3MA1.DF03

Durée : 160 minutes

Nombre de pages de l'énoncé (y compris la page d'en-tête) : 4

Recto/verso : oui

Annexe(s) (titre et nombre de pages) :

Nombre de points de l'examen : 75

Documents et matériel autorisés	
a) mis à disposition par le collège :	**b) personnels à l'élève :**
feuilles quadrillées extraits de la table CRM	calculatrice graphique TI82, et/ou TI30/TI34

Tous les calculs et toutes les étapes de vos raisonnements doivent figurer clairement sur votre copie.

Début du travail

Exercice 1 (8 points)

(a) Donner la définition de la dérivée de f en x .

(b) A l'aide de cette définition, calculer la fonction dérivée de la fonction réelle f définie par $f(x)=2x-3x^2$.

Exercice 2 (14 points)

Soit la fonction réelle f définie par $f(x)=x^3-x^2-x-2$

(a) En quel(s) point(s) (deux coordonnées) de la représentation graphique de f la tangente est-elle horizontale ?

(b) Déterminer l'équation de la droite tangente à une représentation graphique de f au point $(-1\,;f(-1))$.

(c) En quel point *(deux coordonnées)* d'une représentation graphique de f la tangente est-elle parallèle à la tangente définie au point (b) ?

Exercice 3 (12 points)

Calculer si elles existent les limites suivantes et interpréter graphiquement le résultat:

(a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2+4x+3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-2x}{3-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3-\sqrt{2x-1}}{x-5}$

Exercice 4 (12 points)

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en donnant la réponse sous forme d'une seule fraction irréductible et avec des exposants positifs non fractionnaires :

(a) $f(x)=4(1-x+x^2)^3$ (b) $f(x)=\dfrac{3x+5}{1-x^2}$ (c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Exercice 5 (9 points)

Esquisser soigneusement, pour *x* compris entre -4 et 6, une représentation graphique d'une fonction vérifiant <u>toutes</u> les conditions suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3$

(b) *f*(4) n'existe pas, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe mais *f* est non continue en 2,

(d) *f* est continue mais non dérivable en 0,

(e) $f'(-2) = 0$

Exercice 6 (12 points)

On considère le théorème sur la relation entre dérivabilité en continuité :

Théorème : Si $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in I$, est une fonction dérivable en x , alors f est continue en x .

(a) Identifier clairement hypothèse(s) et conclusion(s).

(b) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème. Pour chaque [ARG …], donner précisément le(s) argument(s) manquants (pas sur l'énoncé mais sur votre feuille) :

Démonstration :

On commence par écrire $f(x+h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h+f(x)$, pour $h\neq 0$

Cette égalité est vraie, car [ARG 1]

On a alors :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h+f(x)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h+\lim_{h\to 0} f(x)$$, car [ARG 2]

Or on a :

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\in\mathbb{R}$, car [ARG 3]

$\lim_{h\to 0} h=0$, car [ARG 4]

$\lim_{h\to 0} f(x)=f(x)$, car [ARG 5]

On en déduit donc que :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f'(x)\cdot 0+f(x)$$, car [ARG 6]

$$= f(x)$$, car [ARG 7]

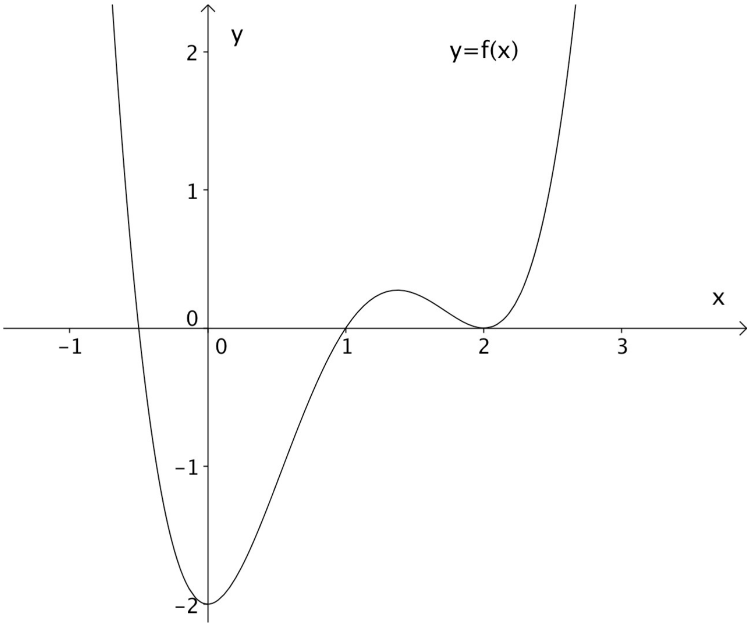
Ce qui démontre que la fonction est bien continue en x, car [ARG 8]

(c) Enoncer la réciproque de ce théorème.

(d) Est-elle vraie ou fausse? Justifier.

Exercice 7 (8 points)

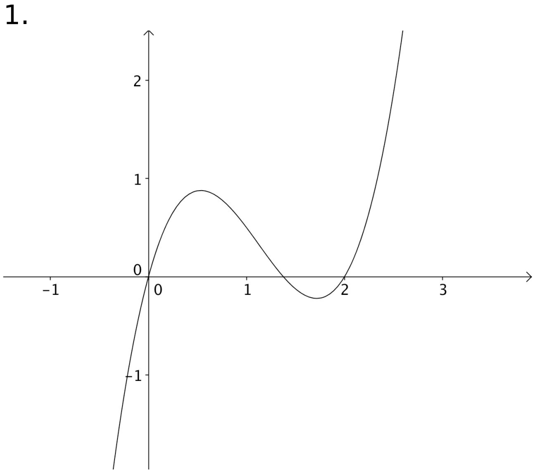
On considère une fonction f dont on donne une représentation graphique :



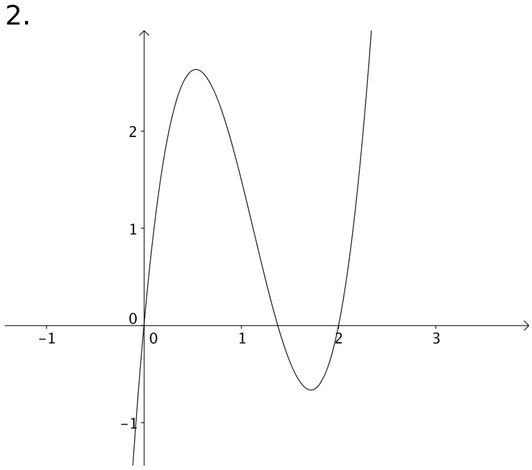
Parmi les fonctions représentées ci-dessous, quelle est celle qui représente la fonction dérivée f' de la fonction f ? Justifier soigneusement votre réponse.

(Tous les repères sont orthonormés)

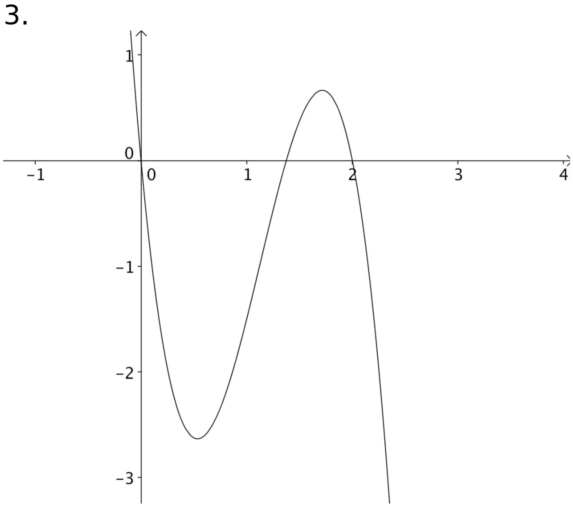
1.



2.



3.



4.