Ma3 Travail n°3 Corrigé /61 mat 2 f 2 [/63]

/34 1) $f(x) = \dfrac{(x+3)^3}{2x^2-10x} = \underbrace{\dfrac{(x+3)^3}{2x(x-5)}}_{\text{forme fact}} = \underbrace{\dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{2x^2-10x}}_{\text{forme dév.}}$ (2)

D_f : pb si $2x=0$ ou $x-5=0$; $x=0$, $x=5$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0;5\}$

Z_f : $f(x)=0 \Leftrightarrow (x+3)^3=0$ et $x\in D_f$ (2)
$x+3=0$
$x=-3$ $\quad Z_f=\{-3\}$

$f(0) \nexists$

as. vert : • candidat $x=0$, type "$\frac{1}{0}$" $\Rightarrow$ as. vert. $x=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{27}{0^+(-5)} = -\infty$ (2)

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \dfrac{27}{0^-(-5)} = +\infty$

• candidat $x=5$, type "$\frac{1}{0}$" $\Rightarrow$ as. vert $x=5$

$\lim\limits_{x\to-5^+} f(x) = \dfrac{-8}{-10\cdot0^+} = +\infty$ (2)

$\lim\limits_{x\to-5^-} f(x) = \dfrac{-8}{-10\cdot0^-} = -\infty$

as. horiz/obl : deg(num) = deg(dénom + 1) $\Rightarrow$ as obl. et pas d'as. horiz

méthode 1 :
$$\begin{array}{l|l} x^3+9x^2+27x+27 & 2x^2-10x \\ -\;(x^3-5x^2) & \hline \frac{1}{2}x+7 \\ \quad 14x^2+27x+27 & \\ -\;(14x^2-70x) & \\ \quad 97x+27 & \end{array}$$ (2)

donc $x^3+9x^2+27x+27 = (2x^2-10x)(\frac{1}{2}x+7) + 97x+27$

d'où $f(x) = \frac{1}{2}x+7 + \dfrac{97x+27}{2x^2-10x}$

càd $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}x+7\right) + \underbrace{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{97x+27}{2x^2-10x}\right)}_{=0}$ (2)

(1) On en déduit que $y=\frac{1}{2}x+7$ est as. oblique de f à $\pm\infty$

méthode 2 : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{2x^3-10x^2} = \dots = \frac{1}{2} = a$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^3}+9x^2+27x+27-\frac{1}{2}(\cancel{2x^3}-10x^2)}{2x^2-10x}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{14x^2+27x+27}{2x^2-10x} = \dots = \dfrac{14}{2} = 7 = b$

d'où $y=\frac{1}{2}x+7$ as. oblique de f à $\pm\infty$

$$f'(x) = \frac{[3(x+3)^2 \cdot (x+3)'] \cdot (2x^2 - 10x) - (x+3)^3 \cdot [4x-10]}{(2x^2-10x)^2}$$

$$= \frac{[3(x+3)^2] \cdot 2x(x-5) - (x+3)^3 [2(2x-5)]}{[2x(x-5)]^2}$$

$$= \frac{(x+3)^2 \cdot 2 \cdot [3x(x-5) - (x+3)(2x-5)]}{[2x(x-5)]^2}$$

$$= \frac{(x+3)^2 \cdot 2 \cdot [3x^2 - 15x - (2x^2 + 6x - 5x - 15)]}{4x^2(x-5)^2}$$

$$= \frac{(x+3)^2 \cdot 2 \cdot [3x^2 - 15x - 2x^2 - x + 15]}{4x^2(x-5)^2}$$

$$= \frac{(x+3)^2 \cdot 2 \cdot [x^2 - 16x + 15]}{4x^2(x-5)^2}$$

$$= \frac{(x+3)^2 \cdot 2 \cdot (x-15)(x-1)}{4x^2(x-5)^2} = \frac{(x+3)^2(x-15)(x-1)}{2x^2(x-5)^2}$$ (5)

$Z_{f'}$: $f'(x) = 0 \iff x = -3$ ou $x = 15$ ou $x = 1$

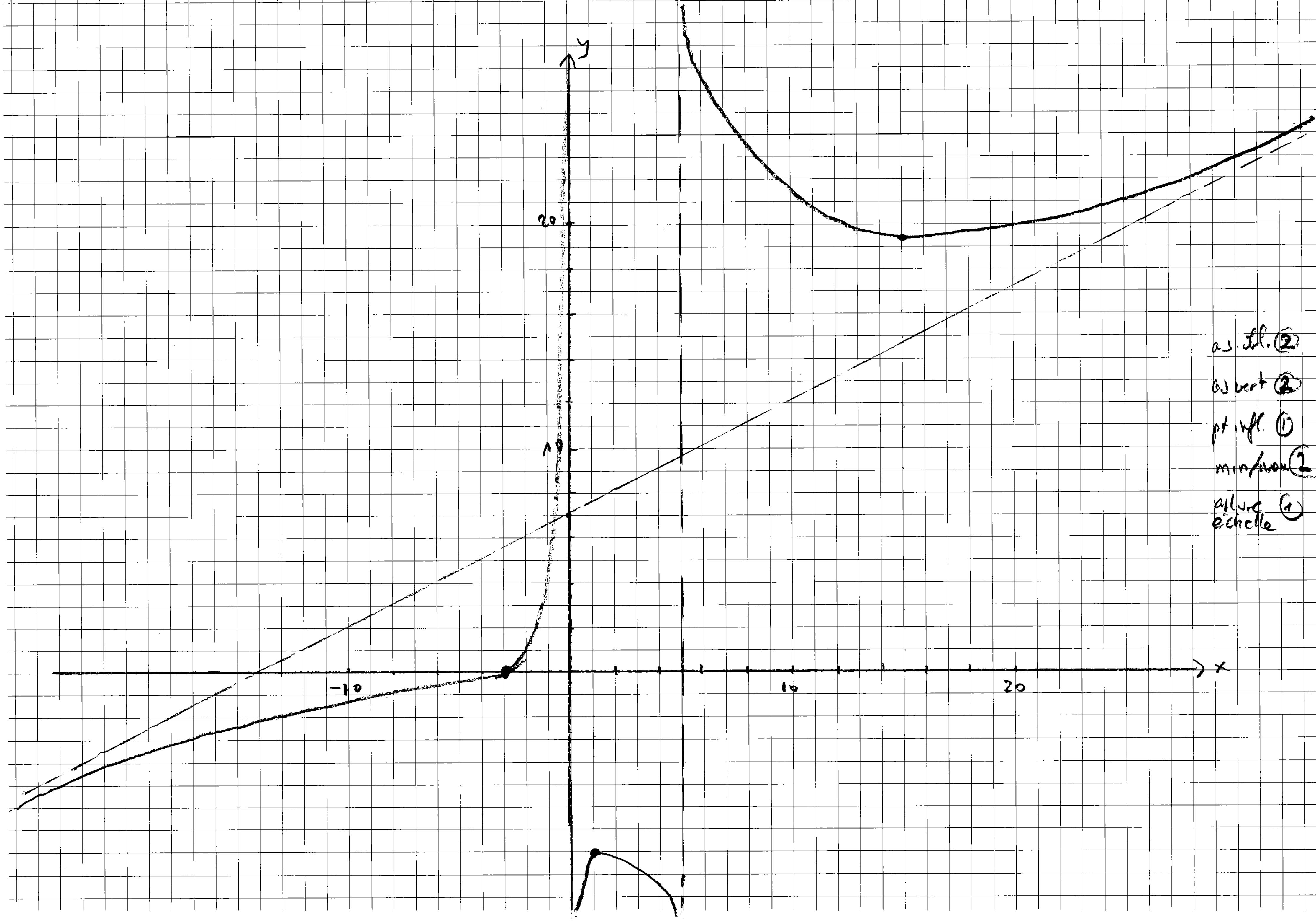
		-3		0		1		5		15	
$(x+3)^2$	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x-15$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$x-1$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$2x^2$	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x-5)^2$	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	+	‖	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	↗	pt infl.	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

(5)

$f(-3) = 0$: $(-3; 0)$ inflexion

$f(1) = -8$: $(1; -8)$ max

$f(15) \cong 19,4$: $(15; 19,4)$ min (3)



as. obl. 2
as vert 2
pt infl. 1
min/max 2
allure
échelle 1

Ex 2

[/12]

x, y les 2 nombres

$x - y = 8 \Leftrightarrow y = x - 8$

xy^2 à optimiser $\Rightarrow f(x) = x(x-8)^2$ (4)

$f'(x) = 1\cdot(x-8)^2 + x \cdot 2(x-8)(x-8)'$

$= (x-8)^2 + 2x(x-8)$

$= (x-8)[x-8+2x] = (x-8)(3x-8)$ (2)

x		$8/3$		8	
$x-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-8$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

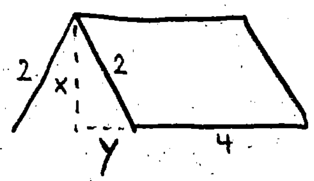
(2)

a) le produit xy^2 est minimal si $x = 8$ et $y = 8 - 8 = 0$ (2)
il vaut alors 0

b) il n'y a pas de maximum car plus x devient grand, plus le produit xy^2 grandit (et il n'y a pas d'asymptote car c'est une fonction polynomiale) (2)

Ex 3

[/15]



Pythagore $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$

Volume de la tente $= \frac{2y \cdot x}{2} \cdot 4 = 4xy$

$= 4x\sqrt{4-x^2}$ (6)

b) $f(x) = 4x\sqrt{4-x^2}$ à optimiser

$f'(x) = 4\sqrt{4-x^2} + 4x \cdot [(4-x^2)^{1/2}]' = 4\sqrt{4-x^2} + 4x \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(4-x^2)'$

$= 4\sqrt{4-x^2} + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(-2x) = 4\sqrt{4-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4(\sqrt{4-x^2})^2 - 4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \frac{4(4-x^2) - 4x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{16 - 8x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{8(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$ (4)

x	0		$\sqrt{2}$		2
$8(2-x^2)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\sqrt{4-x^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

(3)

(2)

... piquet de hauteur $\sqrt{2}$ m