Πα3Ν Corrigé TD 90' n°2 [3Πα1DFOS]

ex1 [/14]

a) $\left(\frac{2}{x^2}+\sqrt{x}-2\right)' = (2x^{-2})'+(\sqrt{x})'-(2)' = 2(x^{-2})' + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2(-2)x^{-3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= -\frac{4}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (4)

b) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x\left[\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1\right]}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ (3)

c) $\left[4(1-x+x^2)^3\right]' = 4\cdot 3(1-x+x^2)^2\cdot(1-x+x^2)'$

$= 12(1-x+x^2)^2(2x-1)$ (3)

d) $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)' = \left[\frac{1}{3}x^{1/3}+3\cdot x^{-1/2}\right]'$ (2)

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}$

$= \frac{1}{9}\,\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$ (2)

ex2 [/16]

a) $\left(-\frac{3}{x}\right)' = -3\left(\frac{1}{x}\right)' = -3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$ (2)

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{3}{x+h}-\left(-\frac{3}{x}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3\cdot x+3(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{-3x}+\cancel{3x}+3h}{(x+h)x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{3\cancel{h}}{(x+h)\cdot x}\cdot\frac{1}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{3}{(x+h)\cdot x} = \frac{3}{x^2}$ (5)

c) $t:\ y=f'(a)(x-a)+f(a)$ avec $a=-3$

$\left.\begin{array}{l} f'(-3)=\frac{3}{(-3)^2}=\frac{1}{3} \\ f(-3)=\frac{-3}{-3}=1 \end{array}\right\}\ y=\frac{1}{3}(x+3)+1=\frac{1}{3}x+2$ (3)

[/12]

<u>ex 5</u>

fct : 1pt

$Z_f = \{-2 ; 4\}$: 1 pt

$f(0) = -2$: 0,5

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$: 1 pt

$\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$: 1pt

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$: 1pt

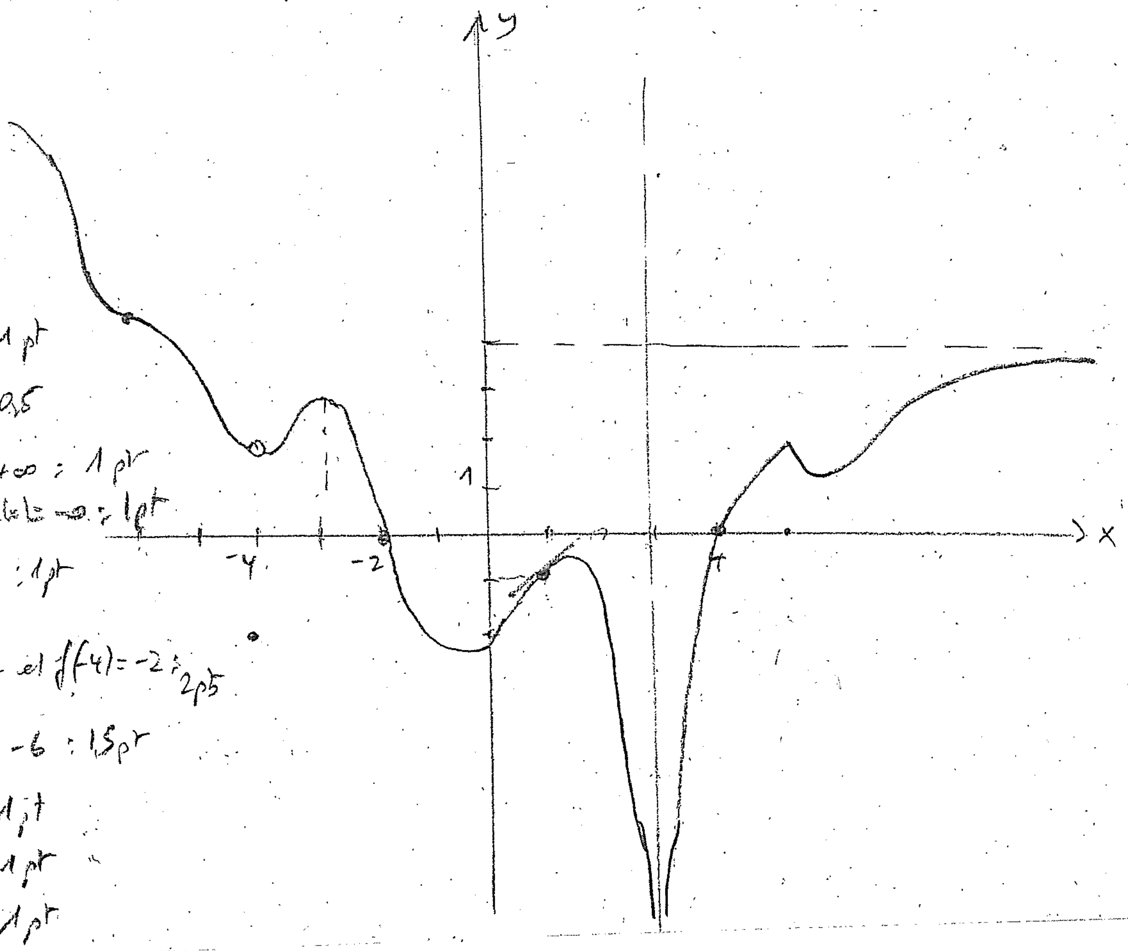
$\lim_{x \to -4} f(x) = 2$ et $f(-4) = -2$: 2p5

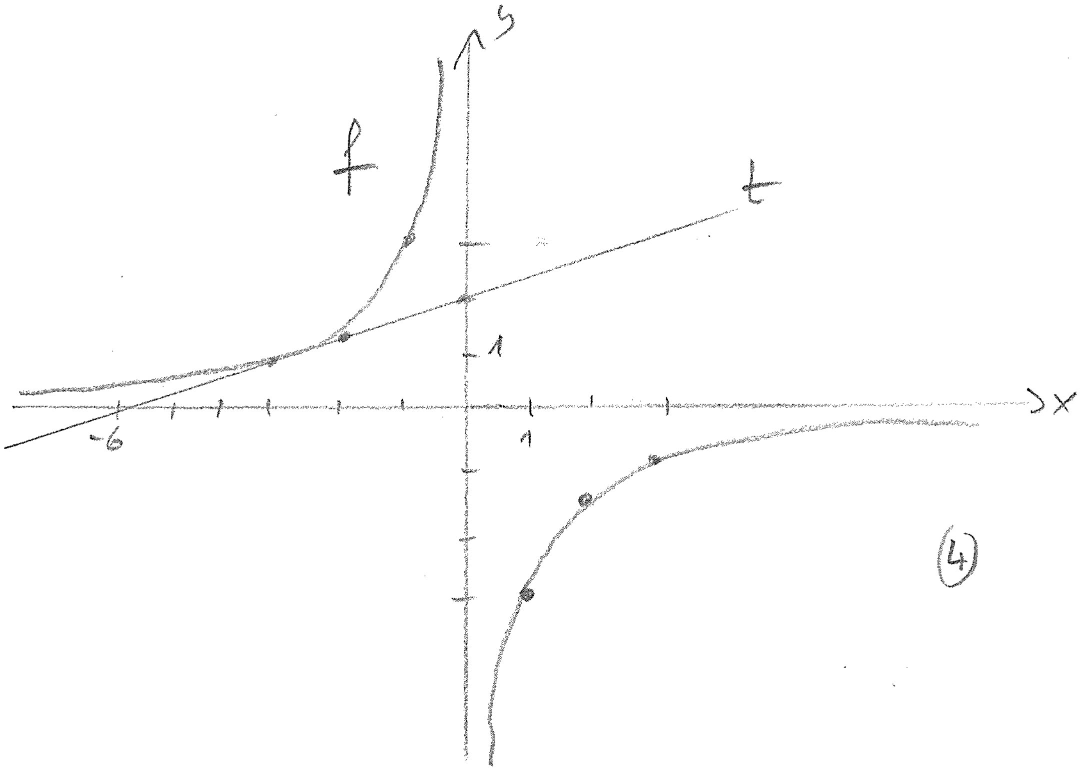
pt infl en $x = -6$: 1,5pt

$f'(-3) = 0$: 1pt

$f'(1) = 1$: 1pt

$f'(5) \nexists$: 1pt





(4)

d) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2}=0$ pas de solution

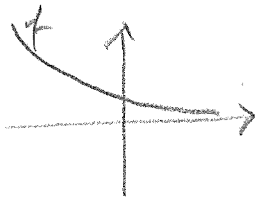
donc f n'admet aucun extremum (2)

Par ailleurs, f n'a pas de "pic" [cf repr. graphique] qui pourrait donner un extremum sans que la dérivée existe. [+2]

ex 4 (16)

a) Faux

Contre-ex :



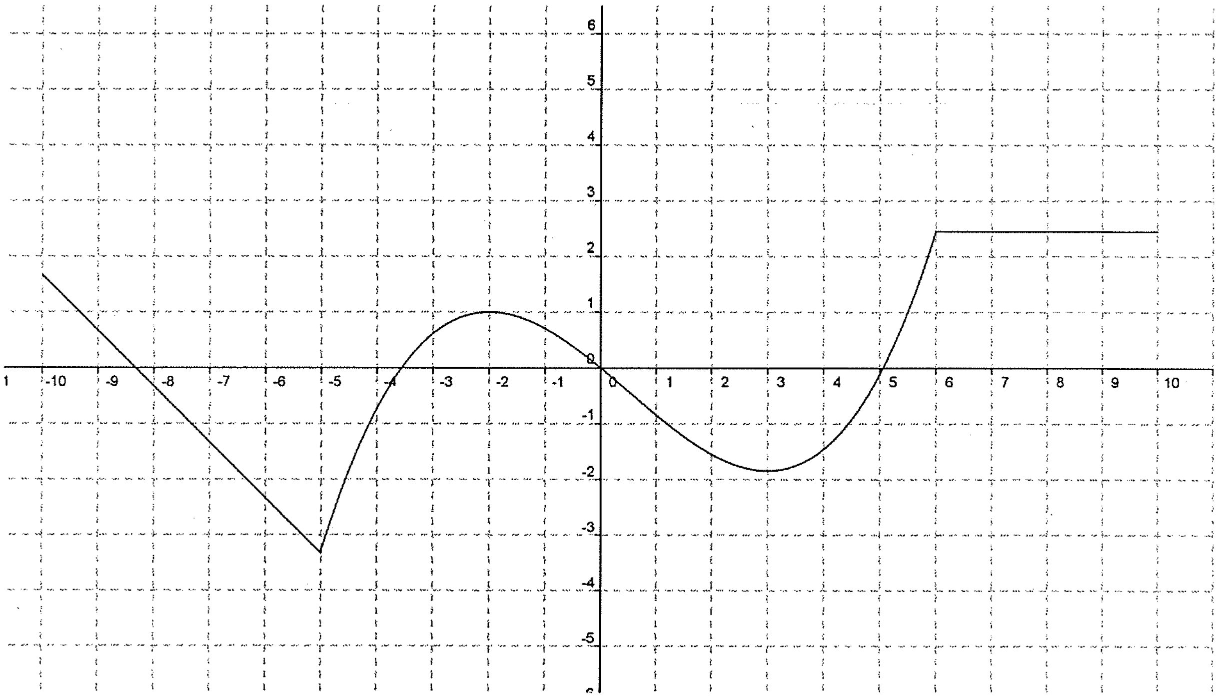
la pente de la tg est toujours négative, pourtant la fonction est positive (1+2)

b) Vrai

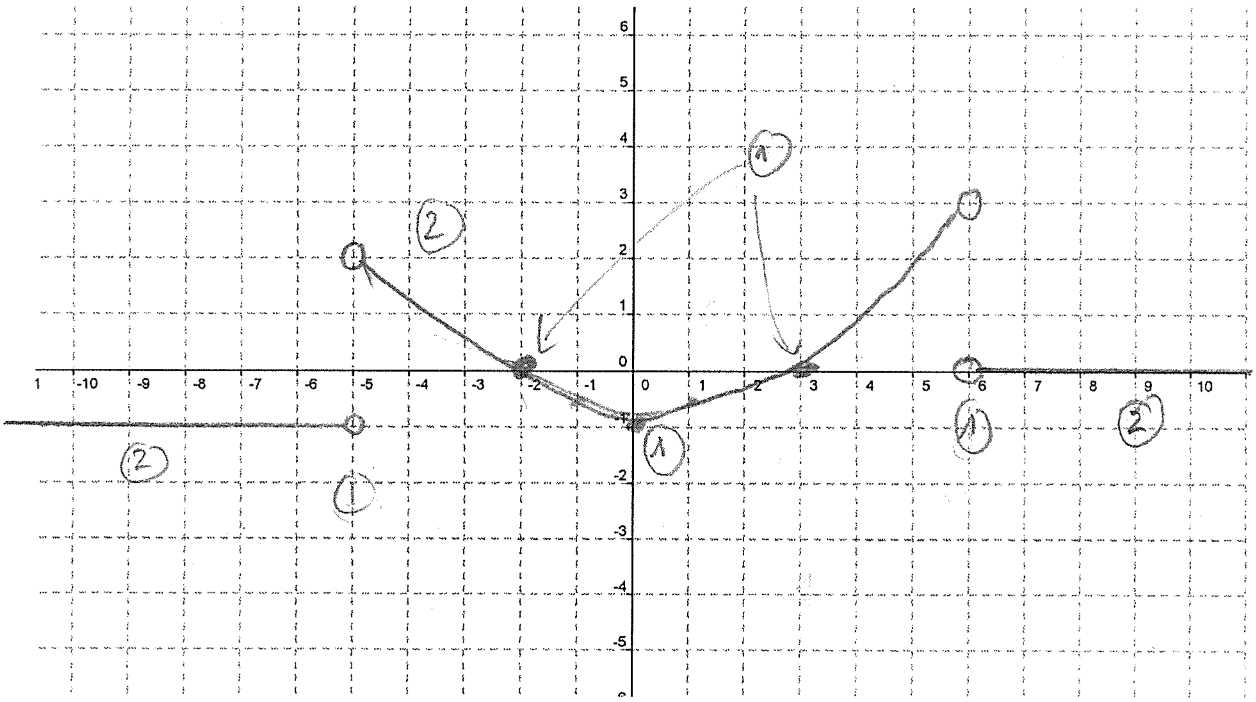
par définition de "point critique" (1+2)

Exercice 3 (environ 8 points)

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction réelle f. Tracer soigneusement une esquisse d'une représentation graphique de la fonction dérivée f' de f dans le repère supplémentaire fourni en-dessous :



[/10]



Exercice 4 (environ 6 points)

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Si f est dérivable sur un intervalle I, alors la pente de la tangente à f en tout point $(a;f(a))$ avec $a \in I$ est toujours positive.

(b) Si a est un point critique de f, alors $f'(a)=0$.