Travail de mathématiques n°2	
Date : 26 novembre 2015 Durée : 90' Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 3Ma1DF02 Matériel autorisé o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique o Table numérique non annotée Remarques o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs. o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! o Indiquez vos initiales en haut de chaque page	**Nom:** .... **Prénom:** .... **Groupe:** .... Notations (une coche par faute) : Fautes : → .... / 2 Français (une coche par faute) [bonus] : Fautes : → .... / 2 Total des points des exercices : .... / 100 Total des points de l'épreuve : .... / 102 Note : / 6

Début du travail

Exercice 1 (environ 14 points)

Soit la fonction f définie $f(x)=\sqrt{3-x}$.

(a) En utilisant la définition de la dérivée, déterminer $f'(x)$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3-a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-a}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(3-x)-(3-a)}{(x-a)[\sqrt{3-x}+\sqrt{3-a}]} = \lim_{x\to a} \frac{-x+a}{(x-a)[\ldots]}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}[\sqrt{3-x}+\sqrt{3-a}]} = \frac{-1}{\sqrt{3-a}+\sqrt{3-a}} = \frac{-1}{2\sqrt{3-a}}$$

d'où $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

Remarque : on peut aussi faire

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3-(x+h)}-\sqrt{3-x}}{h}$$

$$= \ldots = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

/6

(b) Déterminer l'équation de la tangente t à f au point d'abscisse $x = 2$.

$t : y = px + q$

$p = f'(2) = \frac{-1}{2\sqrt{3-2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$ d'où $t : y = -\frac{1}{2}x + q$

$(2; f(2)) \in t \Leftrightarrow (2; 1) \in t \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q$

$\Leftrightarrow q = 2$

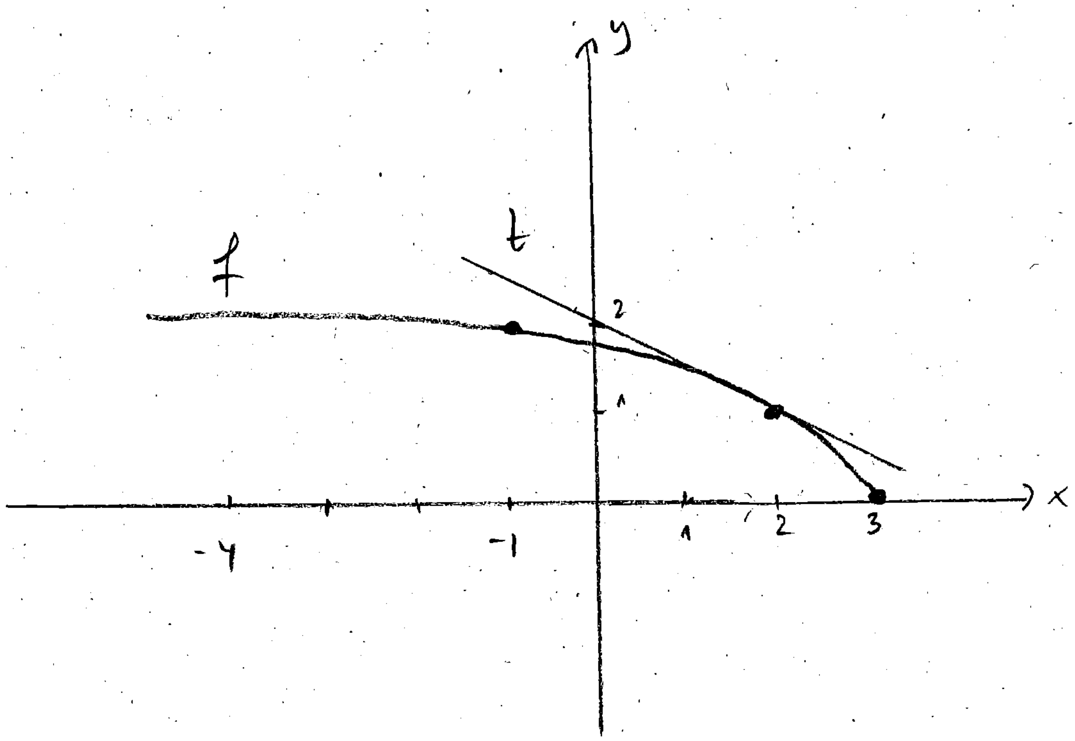
$\boxed{t : y = -\frac{1}{2}x + 2}$ /4

Remarque : directement avec thm "éq. tg" :

$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$

(c) Représenter graphiquement f et t.



/4

Exercice 2 *(environ 16 points)*

En utilisant les formules vues au cours, déterminer les dérivées des fonctions réelles suivantes; donner une réponse factorisée au maximum et ne comprenant aucun exposant négatif ou fractionnaire:

(a) $(\frac{8}{-2x^3})' = \left(-4 \cdot \frac{1}{x^3}\right)' = -4\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -4\left[\frac{-(x^3)'}{(x^3)^2}\right] = -4\,\frac{(-3x^2)}{x^6}$

$= \frac{12x^2}{x^6} = \frac{12}{x^4}$

/3

(b) $(\sqrt{2x})' = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{2}\,(\sqrt{x})' = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

/3

(c) $((2-3x^2)^5+7)' = 5(2-3x^2)^4 \cdot (2-3x^2)' + 0$

$= 5(2-3x^2)^4 \cdot (-6x)$

$= -30x(2-3x^2)^4$

/3

(d) $(\frac{x^2-1}{x^2+1})' = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\left[x^2+1-(x^2-1)\right]}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x \cdot 2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

/4

(e) $(\frac{\sqrt{x^4}}{x^3})' = \left(\frac{x^2}{x^3}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

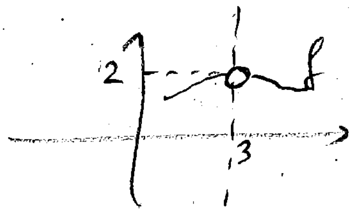
/3

Exercice 3 *(environ 16 points)*

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

(a) Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors $a \in D_f$

Faux
Contre-exple :

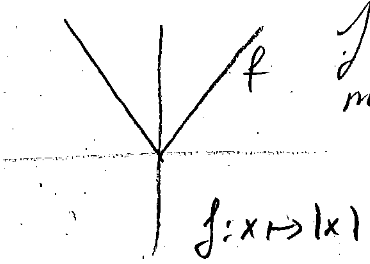


$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ et $f(3) \nexists$

/4 3

(b) Si *f* admet un extremum en *a*, alors *f* '*(a)* = *0*

Faux
Contre-exple

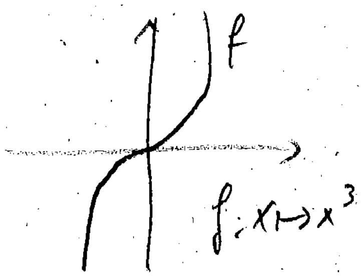


f admet un minimum en 0 mais $f'(0) \nexists$ (car pic)

/4

(c) Si *f* '(*a*) = 0, alors *f* admet un extremum en *a*

Faux
Contre-exple



$f'(0) = 0$, car $(x^3)' = 3x^2$
mais f n'admet pas d'extremum en 0

/4

(d) Si *f* '(*a*) = 0, alors *f* admet un point critique en *a*

Vrai
$f'(a) = 0$ [par hyp]
donc a est un pt critique de f [par déf de "pt critique"]

/4

Exercice 4 *(environ 15 points)*

Représenter graphiquement une fonction f de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes :

(a) L'ensemble Z_f des zéros de f est {-3;1,5;6} /1

(b) $f(3)=6$ /1

(c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=+\infty$ /1

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=1$ /2

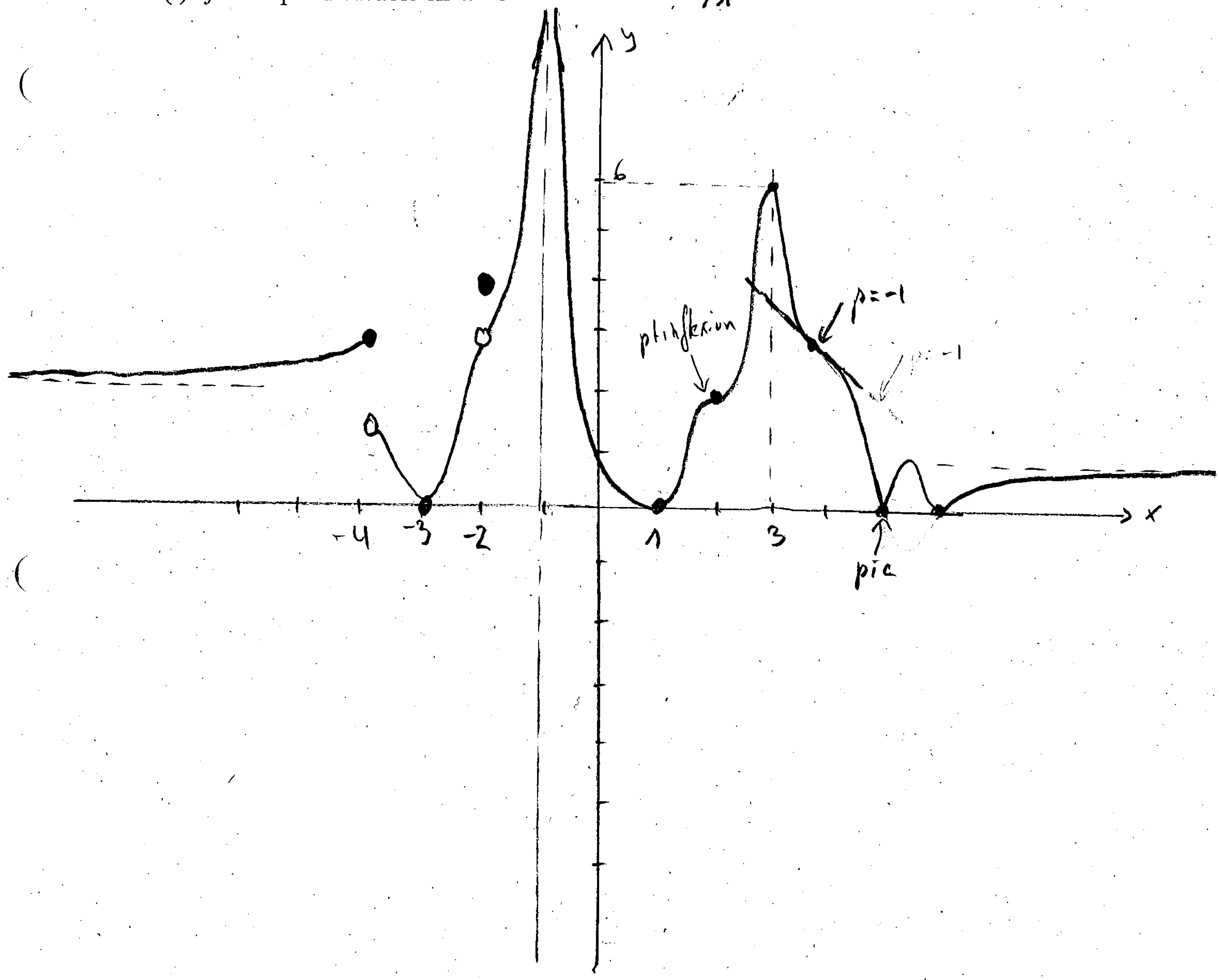
(e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)=3$ et $f(-2)=4$ /2 fct /1

(f) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ n'existe pas et $f(-4)=3$ /2

(g) $f'(+4)=-1$ /2

(h) $f'(2)=0$ mais f n'admet pas d'extremum en $x=2$ /2

(i) f n'est pas dérivable en $x=5$ /1



Exercice 5 *(environ 12 points)*.

Trouver deux nombres dont la somme vaut 12 et dont la somme des cubes soit

(a) minimale.

x, y les 2 nombres

$x+y=12 \Leftrightarrow y=12-x$

somme des cubes à optimiser : x^3+y^3 /3

$f(x)=x^3+(12-x)^3$

$f'(x) = 3x^2+3(12-x)^2(12-x)'$

$= 3x^2+3(12-x)^2\cdot(-1)$

$= 3[x^2-(12-x)^2]$

$= 3[x^2-[144-24x+x^2]]$

$= 3[24x-144] = 18[x-6]$ /3

x		6	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

le minimum est atteint pour $x=6$ et $y=12-6=6$ /3

(a) maximale.

Il n'y a pas de maximum car x peut être aussi grand que possible et la somme des cubes grandit aussi /3

Exercice 6 (environ 17 points)

On considère le théorème « Equation de la tangente à f en $(a;f(a))$ ».

(a) Enoncer précisément ce théorème en identifiant clairement hypothèse(s) et conclusion(s)

Soit f dérivable en a, alors l'équation de la tangente à f en $(a;f(a))$ est donnée par : /2

HYP

$t : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

CONCL /2

(b) Dans la démonstration ci-dessous, donner les arguments qui manquent et compléter lorsque c'est nécessaire :

Démonstration :

- Soit t la tangente à [...f......] en [..$(a;f(a))$..]
- l'équation de t est de la forme [....y.....]= $px + q$

  car [ARG: t est une droite, donc représente une fonction de degré 1 /2
- f est dérivable en a

  car [ARG: ....par hypothèse....] /1
- donc $f'(a)$= [...p......]

  car [ARG: ...interprétation géométrique de la dérivée...] /1
- on en déduit que [.....y.....] = [...$f'(a)$...]$x + q$

  car [ARG: ......substitution $p = f'(a)$.....] /1
- on sait que le point (a ; [..$f(a)$..]) appartient à [..la courbe représentative de..] t

[...] : /6

ARG. : /7

- donc [....$f(a)$...] = [...$f'(a)$...][.....a.........] + q

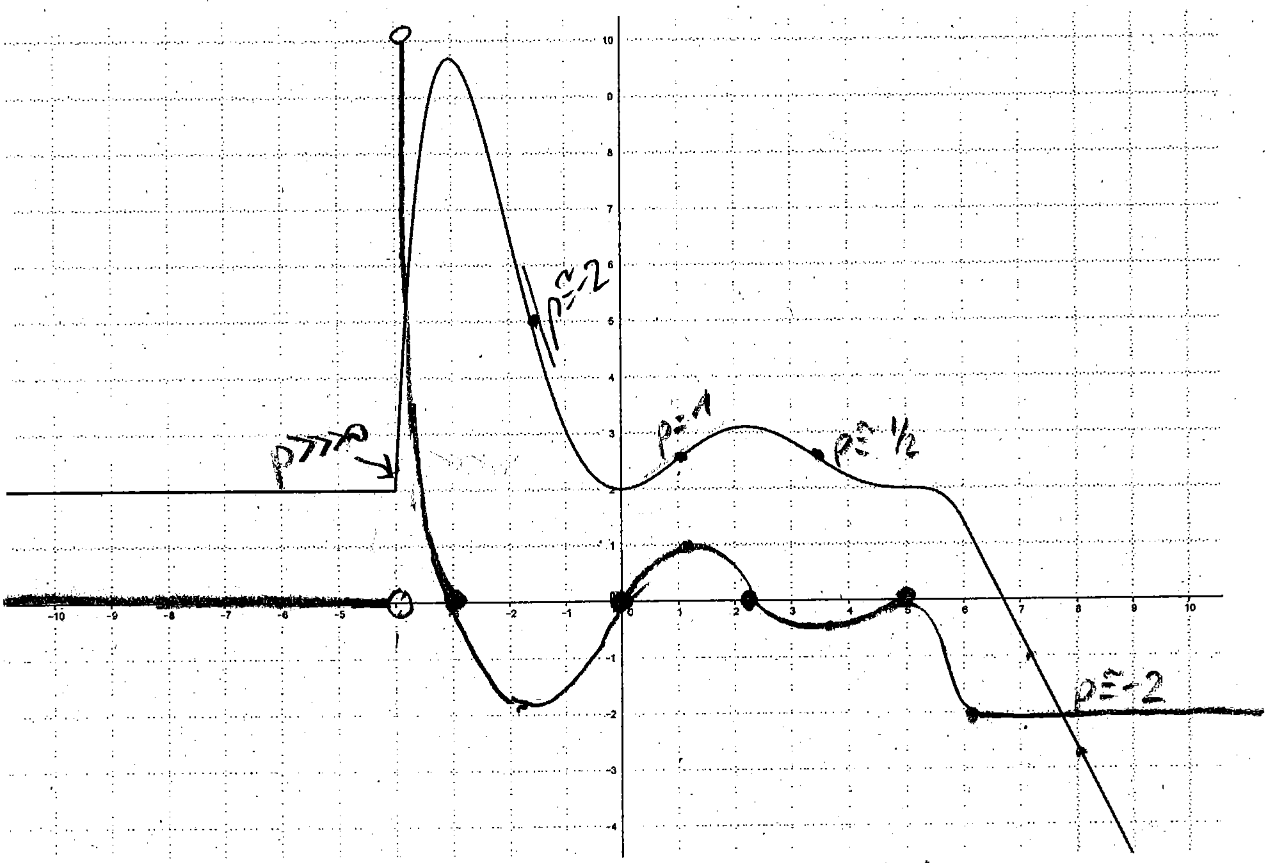
  car [ARG: ...$(x;y) \in$ courbe de $f \Leftrightarrow f(x)=y$.....] /1
- c'est-à-dire que : q= [..$f(a) - f'(a) \cdot a$

  car [ARG: ....$-f'(a)a$ des deux côtés de l'équation..] /1
- on en déduit que l'équation de t est : [....$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$..]

  $= f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice 7 (environ 10 points)

Représenter dans le même repère et de façon suffisamment précise la dérivée de la fonction f donnée :



extrema de f ⇒ zéros de f' : /2

pt inf de f ⇒ " " " " : /1

f cte ⇒ $f'=0$: /2

f linéaire ⇒ f' cte : /2

f pic ⇒ f' ∄ : /1

signes/valeurs $f'(x)$: /2