Travail de mathématiques n°1

Date : 1 octobre 2015

Durée : 90'

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 3Ma1DF02

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle non programmable et non graphique

Remarques

- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ .... / 2

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ .... / 2

Total des points des exercices : .... / 66

Total des points de l'épreuve : .... / 68

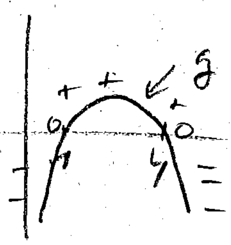
Note : / 6

Début du travail

Exercice 1 : (environ 5 points) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

/5

$= \sqrt{(x-4)(x-1)}$ /1



g définie par $g(x) = x^2-5x+4$

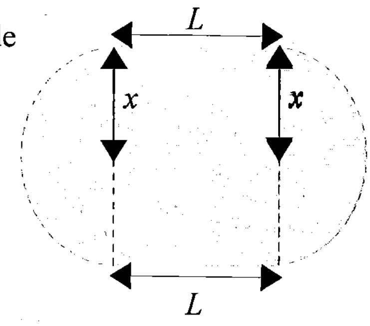
/2

$D_f =]-\infty;1] \cup [4;+\infty[$ /2

Exercice 2 : (environ 19 points)

/19

On considère la figure formée d'un rectangle de longueur L et de deux demi-disques de rayon x :



(a) Exprimer le périmètre P en fonction de L et x.

$P = 2L + 2\pi x$ /2

(b) Sachant que le périmètre de cette figure mesure 400 mètres, exprimer la longueur L en fonction de x.

$400 = 2L + 2\pi x \Leftrightarrow L = \frac{400 - 2\pi x}{2} = 200 - \pi x$ /2

(c) Montrer que l'aire totale $A(x)$ de cette figure en fonction de x est donnée par $A(x) = 400x - \pi x^2$

$A(x) = L \cdot 2x + \pi x^2 = (200 - \pi x)2x - \pi x^2 = 400x - \pi x^2$ /2

(d) Expliquer pourquoi le domaine des valeurs intéressantes pour le problème est $]0; \frac{200}{\pi}[$.

x est une longueur $\Rightarrow x \geq 0$

si $x = 0$, il n'y a plus d'aire $\Rightarrow x \neq 0$

x maximal pour un cercle et $L = 0$: $200 - \pi x = 0$

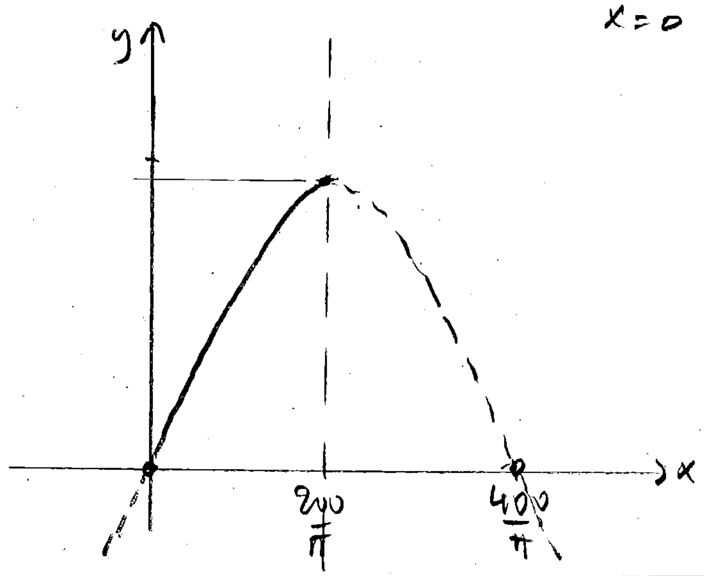
$x = \frac{200}{\pi}$

donc $D_{vip} =]0; 200/\pi[$ /3

(e) Déterminer les zéros de A puis esquisser une représentation graphique de la fonction A sur $\mathbb{R}$ (pas besoin d'être trop précis) :

$A(x) = 0 \Leftrightarrow 400x - \pi x^2 = 0 \Leftrightarrow x(400 - \pi x) = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{400}{\pi}$ /2



/2

(e) Quelles est(sont) la(les) valeur(s) de x pour la(les)quelle(s) l'aire totale est maximale (réponse arrondie au dixième) ?

$x = \frac{200}{\pi} \cong 63,7 \text{ m}$ /2

(f) A quelle(s) valeur(s) de L cela correspond-t-il (réponse arrondie au dixième) ?

$L = 200 - \pi x = 200 - \cancel{\pi} \cdot \frac{200}{\cancel{\pi}} = 0$ /2

on a un unique cercle

(g) Que vaut alors cette aire ?

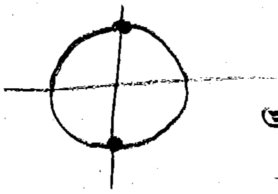
$A\left(\frac{200}{\pi}\right) = 400 \cdot \frac{200}{\pi} - \pi \cdot \left(\frac{200}{\pi}\right)^2 = \frac{80000}{\pi} - \frac{40000}{\pi} = \frac{40000}{\pi} \cong 12732,4 \text{ m}^2$

/2

Exercice 3 : (environ 6 points) Résoudre les équations suivantes :

[/6]

(a) $-4\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$



$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

/3

(b) $10^x=3 \Leftrightarrow \log(10^x) = \log(3)$

$\Leftrightarrow x \underbrace{\log(10)}_{=1} = \log(3)$

$\Leftrightarrow x = \log(3) \cong 0,48$ /3

Exercice 4 (environ 6 points) Vrai ou faux ? Justifier.

[/6]

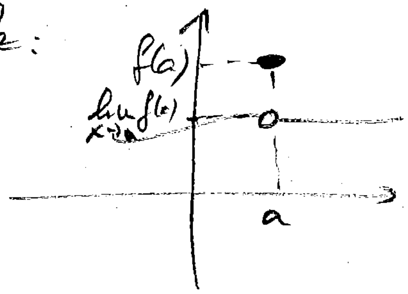
(a) $\sqrt{9}=\pm 3$

Faux ; par définition de $\sqrt{\ }$, le résultat doit être ≥ 0

/1+2

(b) Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Faux , contre-exemple :



/1+2

Exercice 5 : (environ 6 points)

On considère l'annexe « **Théorème [Limites de fonctions élémentaires]** et **Théorème [Propriétés des limites]** »

[/6]

(a) Démontrer PrL6 en justifiant chaque égalité à l'aide des autres propriétés.

$$\lim_{x\to a} k f(x) \overset{PrL3}{=} \lim_{x\to a} k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\overset{L1}{=} k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

/2

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to 7} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x-9}} \right)$ en justifiant chaque étape :

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2}{x-9} \overset{PrL4}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 7} x^2}{\lim\limits_{x\to 7} \sqrt{x+9}}$$

$$\underset{PrL5}{\overset{PrL7}{=}} \frac{7^2}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 7} x+9}}$$

$$\overset{PrL7}{=} \frac{49}{\sqrt{7+9}}$$

$$= \frac{49}{\sqrt{16}} = \frac{49}{4}$$

/4

Exercice 6 (environ 15 points)

Calculer les limites et interpréter graphiquement :

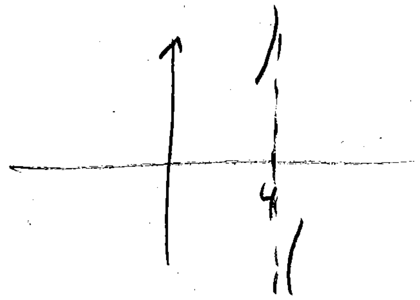
(/15)

(a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{+x}{4-x}\right) =$ " $\frac{+4}{0}$ " type " $\frac{1}{0}$ "

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \frac{+4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \nexists$ /3



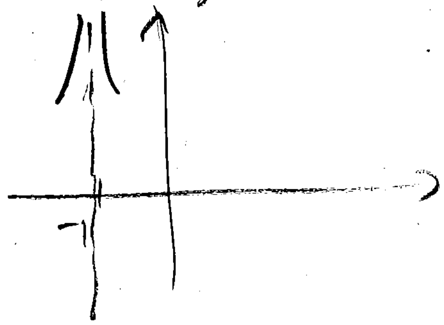
/1

(b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{-x}{(x+1)^2}\right) =$ " $\frac{1}{0}$ " type " $\frac{1}{0}$ "

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

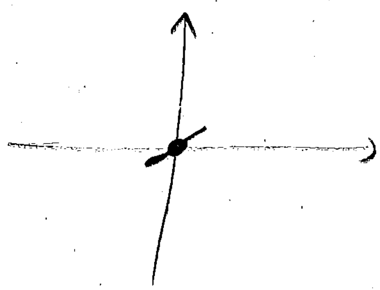
donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ /3



/1

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-x}{(x+1)^3}\right) = \frac{0}{1}$ "pas de pb !"

$= 0$ /2



/1

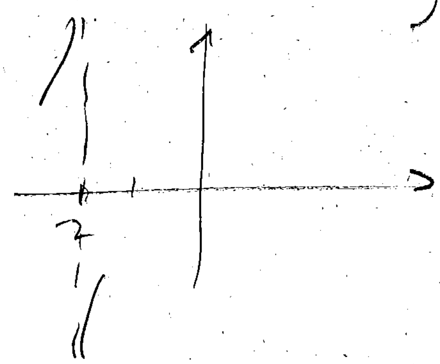
(d) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x}=$ "$\dfrac{4-6+5}{+4-4}$" $=$ "$\dfrac{3}{0}$" type "$\dfrac{1}{0}$"

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+3x+5}{x(x+2)}=\dfrac{3}{-2\cdot 0^-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\dfrac{3}{-2\cdot 0^+}=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ ∄

/3



/1

Exercice 7 (environ 8 points)

/8

Esquisser la représentation graphique d'une (une seule!) fonction f qui vérifie <u>toutes</u> les conditions ci-dessous :

(a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-8;1;7\}$

(b) $Z_f=\{-2;0;\pi\}$

(c) $\lim\limits_{x\to-8} f(x)=4$

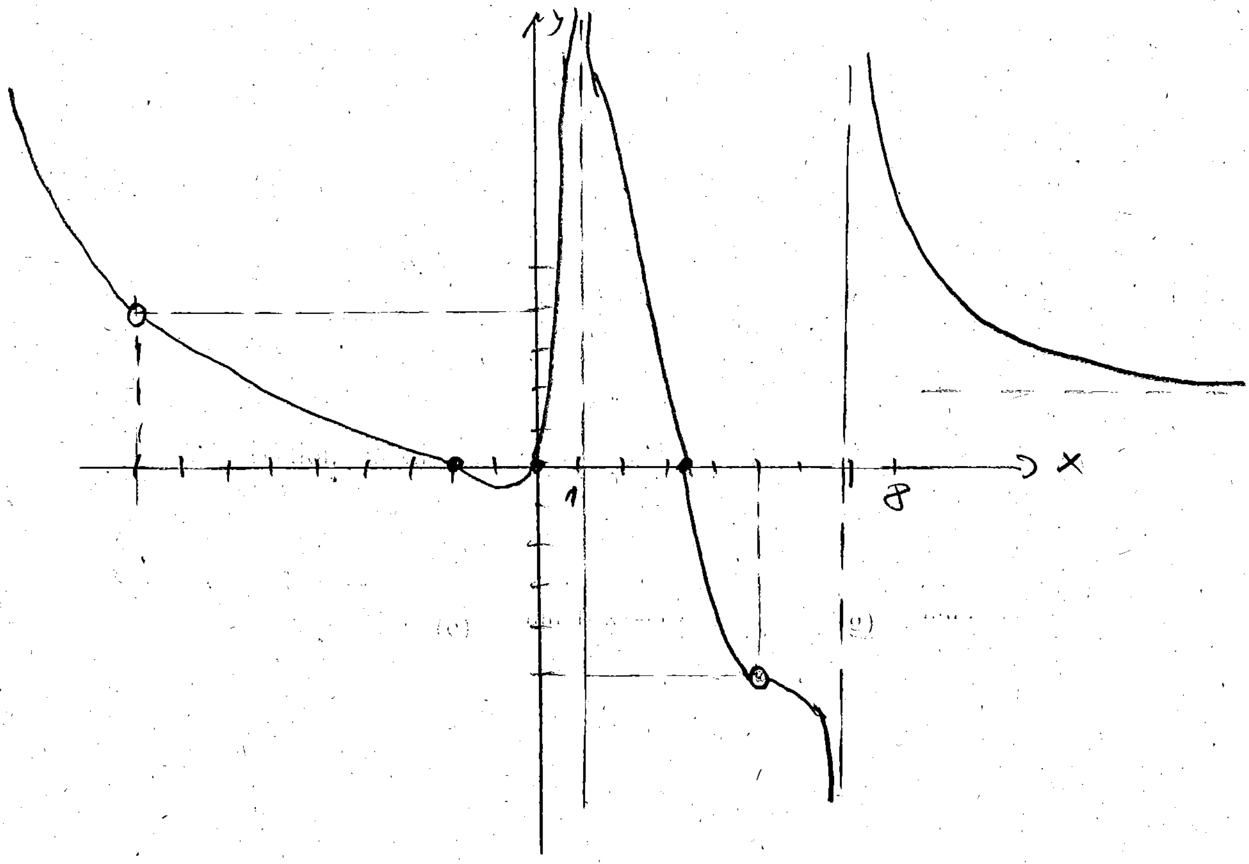
(d) $\lim\limits_{x\to7} f(x)=-\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

(g) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

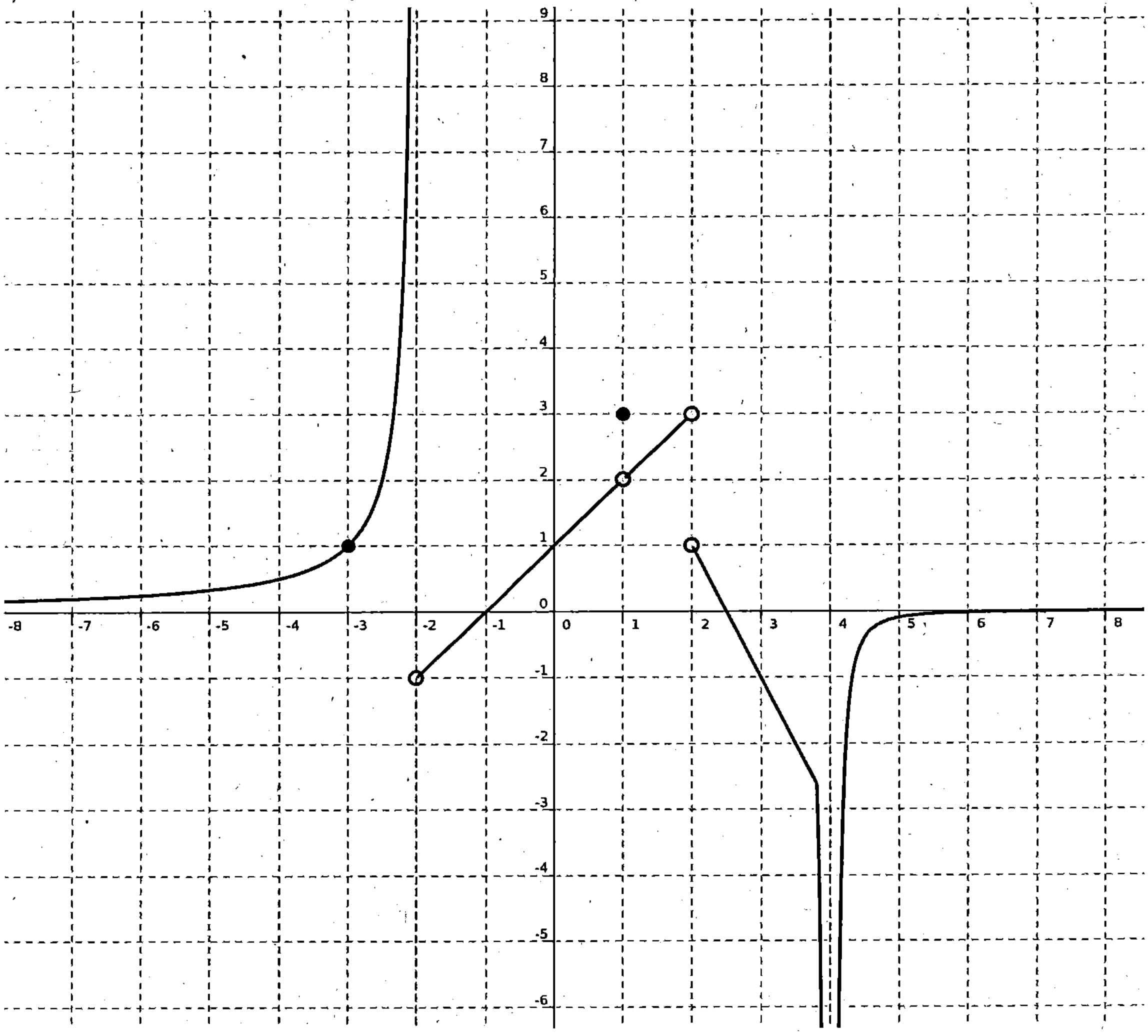
(h) $\lim\limits_{x\to5} f(x)=-5$ et $f(5)$ ∄



/8

Exercice 3 : (environ 8 points)

On considère une fonction f dont on donne ci-dessous une représentation graphique :



Déterminer graphiquement :

(a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ 3

(b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ 1

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\nexists$

(d) $f(2)$ $\nexists$

(e) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$ $-\infty$

(f) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ $-\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ 1

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$ 0

(i) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$ $+\infty$

(j) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$ -1

(k) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ $\nexists$

(l) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$ 0

(m) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ 2

(n) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ 2

(o) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ 2

(p) $f(1) =$ 3

/0,5 pour réponse

ANNEXE

Théorème [Limites de fonctions élémentaires]

[L1] $\lim_{x \to a} k = k \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L2] $\lim_{x \to a} x = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L3] $\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$ et $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L4] $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L5] $\lim_{x \to a} \log_b(x) = \log_b(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}_*^+$ **et** $\lim_{x \to a} \exp_b(x) = \exp_b(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Théorème [Propriétés des limites]

[PrL1] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

[PrL2] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

[PrL3] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

[PrL4] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent et si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, alors on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

[PrL5] Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{t \to b} g(t) = g(b)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$$

[PrL6] Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et si $k \in \mathbb{R}$ est une constante, alors on a :

$$\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = \lim_{x \to a} k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

[PrL7] Si f est une fonction polynomiale
(c'est-à-dire que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$)
alors, pour $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$$
$$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} + \ldots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0$$