Travail de mathématiques n°1

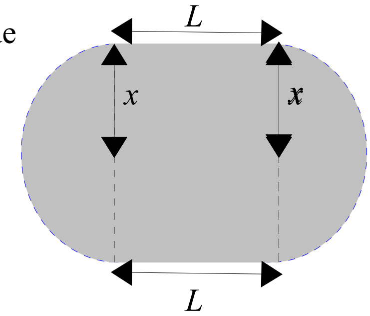
<table>
<tr>
<td>
Date : 1 octobre 2015
Durée : 90'
Enseignant : Jean-Marie Delley
Cours : 3Ma1DF02
Matériel autorisé
o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique
o Table numérique non annotée
Remarques
o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
o Indiquez vos initiales en haut de chaque page
</td>
<td>
Nom: ....
Prénom: ....
Groupe: ....
Notations (une coche par faute) :
Fautes : → .... / 2
Français (une coche par faute) [bonus] :
Fautes : → .... / 2
Total des points des exercices : …….. / 66
Total des points de l'épreuve : …….. / 68
Note : / 6
</td>
</tr>
</table>

Début du travail

Exercice 1 : (environ 5 points) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

Exercice 2 : (environ 18 points)

On considère la figure formée d'un rectangle de longueur L et de deux demi-disques de rayon x :



(a) Exprimer le périmètre P en fonction de L et x .

(b) Sachant que le périmètre de cette figure mesure 400 mètres, exprimer la longueur L en fonction de x .

(c) Montrer que l'aire totale $A(x)$ de cette figure en fonction de x est donnée par $A(x)=400x-\pi x^2$

(d) Expliquer pourquoi le domaine des valeurs intéressantes pour le problème (D_{vipp}) est $D_{vipp}=]0\,;\frac{200}{\pi}[$.

(e) Déterminer les zéros de A puis esquisser une représentation graphique de la fonction A sur $\mathbb{R}$ (pas besoin d'être trop précis) :

(f) Quelles est(sont) la(les) valeur(s) de x pour la(les)quelle(s) l'aire totale est maximale (réponse exacte <u>et</u> arrondie au dixième) ?

(g) A quelle(s) valeur(s) de L cela correspond-t-il (réponse exacte <u>et</u> arrondie au dixième) ? Qu'en déduire quant à la figure ?

(h) Que vaut alors cette aire ?

Exercice 3 : (environ 6 points) Résoudre les équations suivantes :

(a) $-4\cos(2x)=0$

(b) $10^x=3$

Exercice 4 (environ 6 points) Vrai ou faux ? Justifier.

(a) $\sqrt{9}=\pm 3$

(b) Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exercice 5 : (environ 6 points)

On considère l'annexe « **Théorème [Limites de fonctions élémentaires]** et **Théorème [Propriétés des limites]** »

(a) Démontrer PrL6 en justifiant chaque égalité à l'aide des autres propriétés.

(b) Calculer $\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+9}} \right)$ en justifiant chaque étape :

Exercice 6 (environ 15 points)

Calculer les limites et interpréter graphiquement :

(a) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{x}{4-x} \right) =$

(b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{-x}{(x+1)^2} \right) =$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{-x}{(x+1)^3} \right) =$

(d) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x} =$

Exercice 7 (environ 8 points)

Esquisser la représentation graphique d'une (une seule!) fonction *f* qui vérifie <u>toutes</u> les conditions ci-dessous :

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-8;1;7\}$

(b) $Z_f = \{-2;0;\pi\}$

(c) $\lim\limits_{x \to -8} f(x) = 4$

(d) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = -\infty$

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

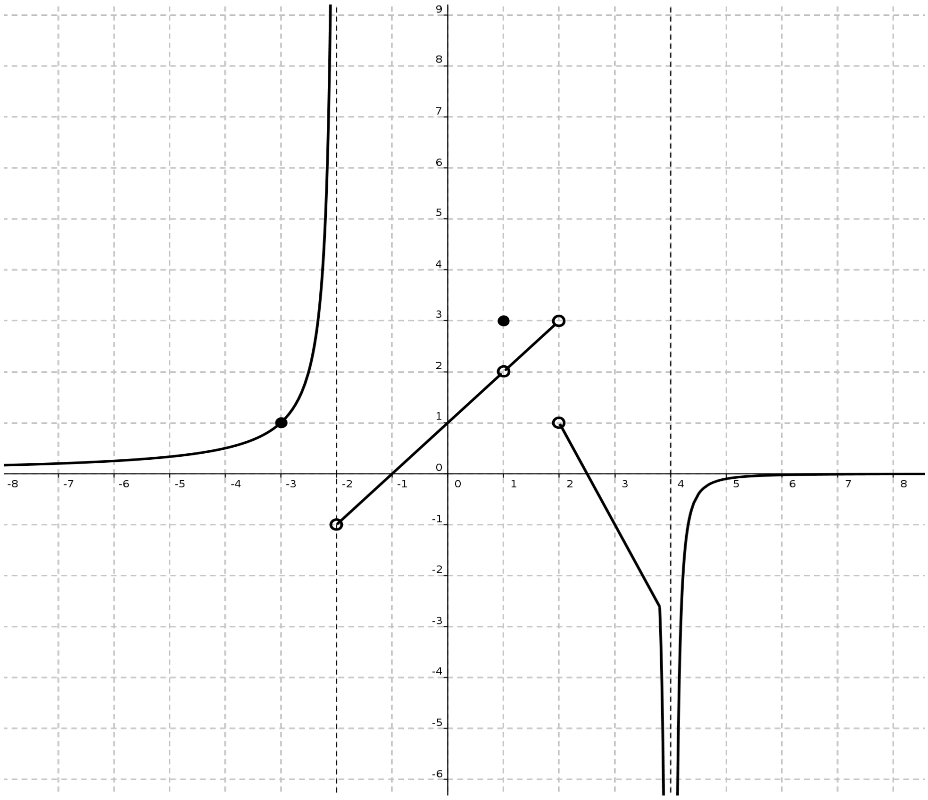
(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(g) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

(h) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -5$ et f(5) n'existe pas

Exercice 8 : (environ 8 points)

On considère une fonction *f* dont on donne ci-dessous une représentation graphique :



Déterminer graphiquement :

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

(b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

(d) $f(2) =$

(e) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) =$

(f) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

(g) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$

(h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

(i) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$

(j) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$

(k) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$

(l) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

(m) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$

(n) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$

(o) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

(p) $f(1) =$

ANNEXE

Théorème [Limites de fonctions élémentaires]

[L1] $\lim\limits_{x\to a} k=k \quad \forall a\in\mathbb{R}$

[L2] $\lim\limits_{x\to a} x=a \quad \forall a\in\mathbb{R}$

[L3] $\lim\limits_{x\to a} \sin(x)=\sin(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \cos(x)=\cos(a) \quad \forall a\in\mathbb{R}$

[L4] $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x}=\sqrt{a}, \ \forall a\in\mathbb{R}_*^+$ et $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}, \ \forall a\in\mathbb{R}$

[L5] $\lim\limits_{x\to a} \log_b(x)=\log_b(a), \ \forall a\in\mathbb{R}_*^+$ **et** $\lim\limits_{x\to a} \exp_b(x)=\exp_b(a), \ \forall a\in\mathbb{R}$

Théorème [Propriétés des limites]

[PrL1] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

[PrL2] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

[PrL3] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

[PrL4] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, alors on a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

[PrL5] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{t\to b} g(t)=g(b)$ existent, alors on a :

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))=g(b)$$

[PrL6] Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et si $k\in\mathbb{R}$ est une constante, alors on a :

$$\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)] = \lim_{x\to a} k\cdot\lim_{x\to a} f(x)=k\cdot lim_{x\to a} f(x)$$

[PrL7] Si f est une fonction polynomiale
(c'est-à-dire que $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$)
alors, pour $a\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)&=\lim_{x\to a}(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0)\\&=a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+a_{n-2}a^{n-2}+...+a_2a^2+a_1a+a_0\end{aligned}$$