Travail de mathématiques n°3

Date : 10 mars 2016 Durée : 90' Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 3Ma1DF02 Matériel autorisé o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique o Table numérique non annotée Remarques o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs. o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! o Indiquez vos initiales en haut de chaque page	**Nom:** .... **Prénom:** .... **Groupe:** .... Notations (une coche par faute) : Fautes : → .... / 2 Français (une coche par faute) [bonus] : Fautes : → .... / 2 Total des points des exercices : .... /76 Total des points de l'épreuve : .... /76 Note : / 6

Début du travail

Exercice 1 *(environ 10 points)*

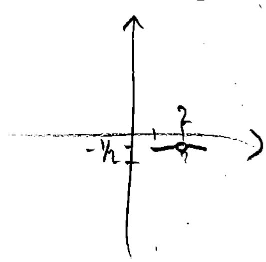
Calculer :

[/10]

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(4-2x)}{4x-8}$ type "$\frac{0}{0}$" trig

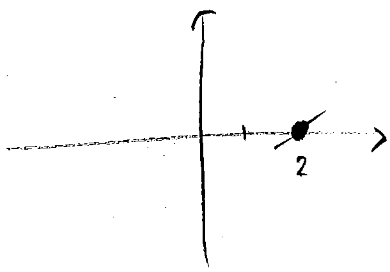
$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(4-2x)}{-2(4-2x)} = -\dfrac{1}{2} \underbrace{\lim\limits_{\substack{x-2\to 0\\ -(x-2)\to 0\\ -x+2\to 0\\ -2x+4\to 0}} \dfrac{\sin(4-2x)}{4-2x}}_{=1} = -\dfrac{1}{2}$

/3



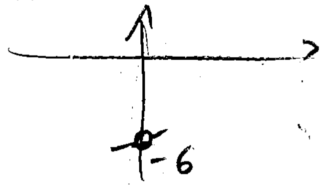
(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\cos(x-2)}$ pas d'indétermination

$= \dfrac{2-2}{\cos(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$



/3

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\tan(3x)}{2x}$ Type "$\frac{0}{0}$" trig



$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\sin(3x)}{2x\cos(3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cancel{4}^{2}\cdot 3\sin(3x)}{\cancel{2}\;3x}\cdot\frac{1}{\cos(3x)}$

$= -6\underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}\frac{\sin(3x)}{3x}}_{=1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos(3x)} = -6\cdot 1\cdot\frac{1}{\underbrace{\cos(0)}_{=1}} = -6$

/4

Exercice 2 *(environ 15 points)*

/15

Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

(a) $f(x)=\sin(-x)+\tan(x)$

$f'(x) = \cos(-x)\cdot(-1) + [1+\tan^2(x)]$ ou $f'(x) = -\cos(-x) + \frac{1}{\cos^2(x)}$

$= -\cos(-x) + 1 + \tan^2(x)$

/3

(b) $f(x)=\cos(x^5+x)$

$f'(x) = -\sin(x^5+x)\cdot(5x^4+1)$

/3

(c) $f(x)=\cos^{10}(\frac{1}{4x+1})$

$f'(x) = 10\cos^9\left(\frac{1}{4x+1}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{4x+1}\right)\right)\cdot\frac{-4}{(4x+1)^2}$

/5

(d) $f(x)=x^3-x\sqrt{2x}$

$f'(x) = 3x^2 - \left[1\sqrt{2x} + x\left[(2x)^{1/2}\right]'\right]$

$= 3x^2 - \left[\sqrt{2x} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(2x)^{-1/2}\cdot\cancel{2}\right]$

$= 3x^2 - \sqrt{2x} - \frac{x}{\sqrt{2x}}$

/4

(e) $f(x)=tg(\sin(x))$

$f'(x) = [1+\cos^2(\sin(x))]\cdot\cos(x)$

/3

Exercice 3 (environ 10 points)

/10

Représenter graphiquement ci-dessous une fonction f satisfaisant toutes les conditions suivantes:

i f est définie mais pas continue en $x=2$ /1

ii f n'est ni définie ni continue en $x=3$ /1

iii f est définie et continue mais pas dérivable en $x=4$ /1

iv $\lim_{x\to -3} f(x)=-2$, f est définie mais pas continue en $x=-3$ et $f(-3)=-1$ /1

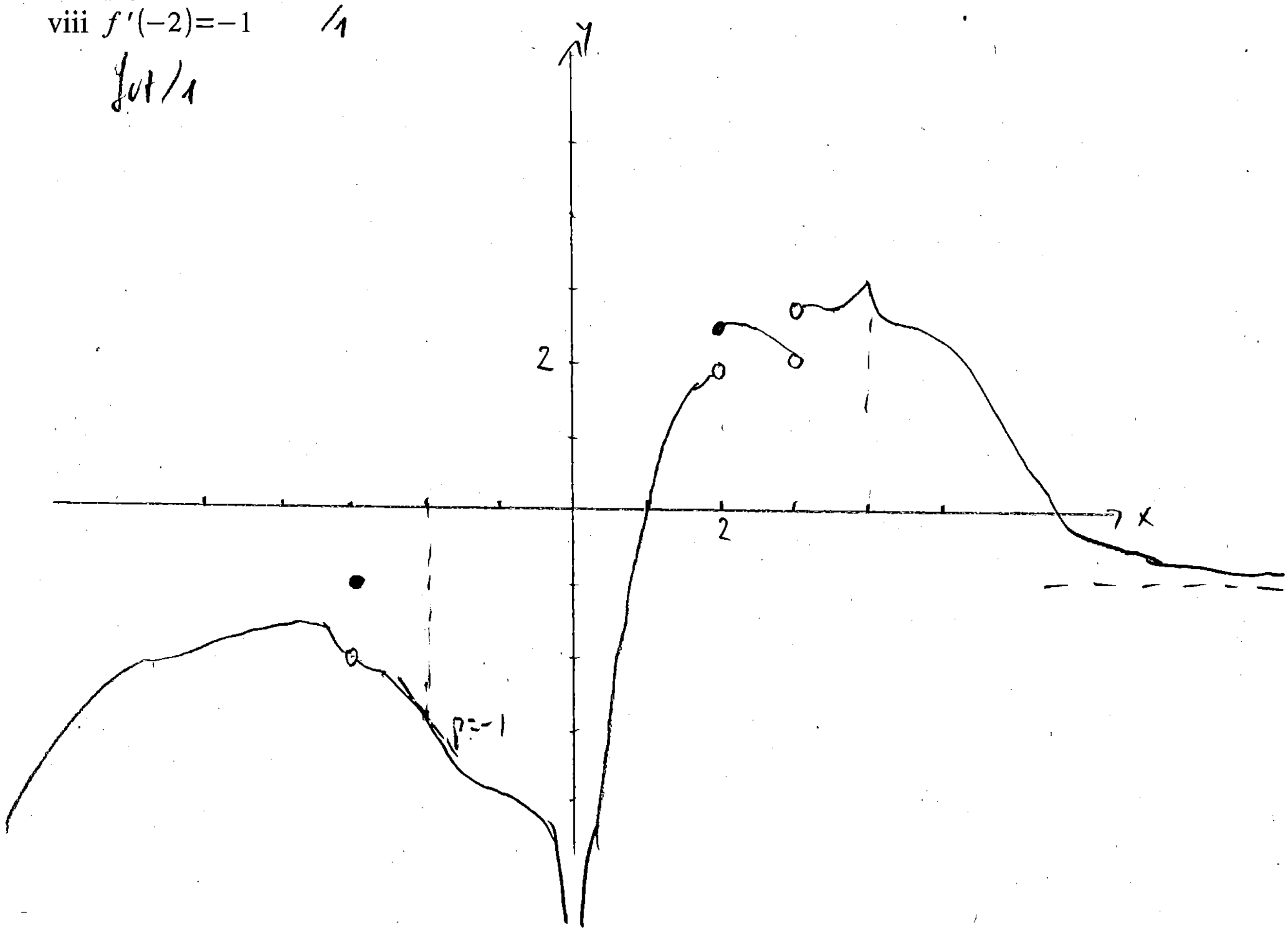
v $\lim_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas et f n'est pas définie en $x=-1$ /1

vi $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-1$ /2

vii $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ /1

viii $f'(-2)=-1$ /1

Tot /1



Exercice 4 (environ 6 points)

(/6)

(a) Enoncer précisément le théorème sur la dérivée de l'inverse, en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

$\underbrace{\text{Si } f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } a \in I,\ f(x) \neq 0 \text{ sur un voisinage } V \text{ de } a}_{\text{HYP}}$, alors $\underbrace{\tfrac{1}{f} \text{ dérivable en } a \text{ et } \left(\tfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}}_{\text{CONCL}}$

/4

(b) Donner un exemple de votre choix d'application de ce théorème.

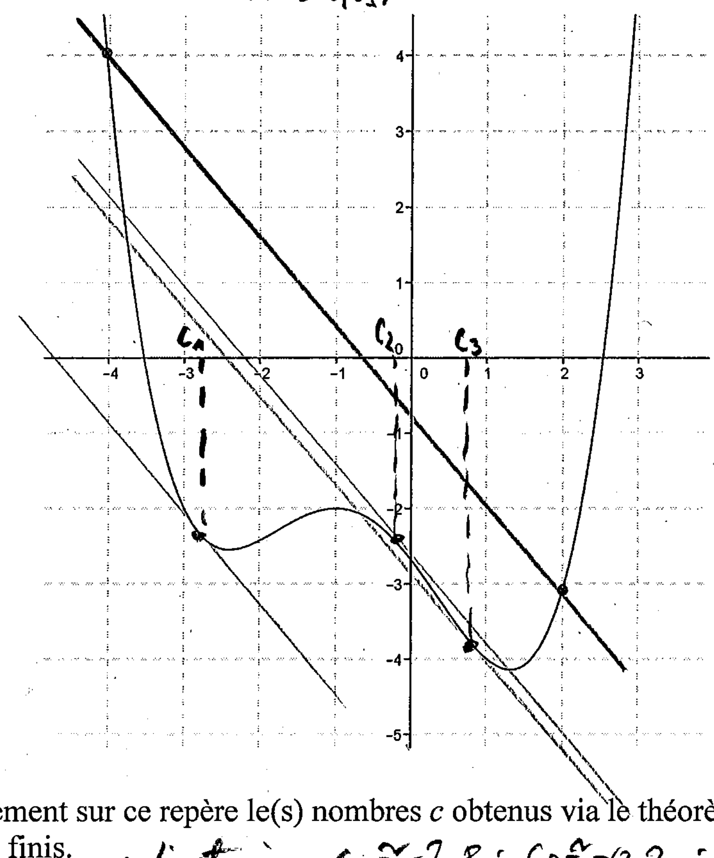
$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

/2

Exercice 5 (environ 6 points)

(/6)

On considère la fonction suivante sur $[-4;2]$:



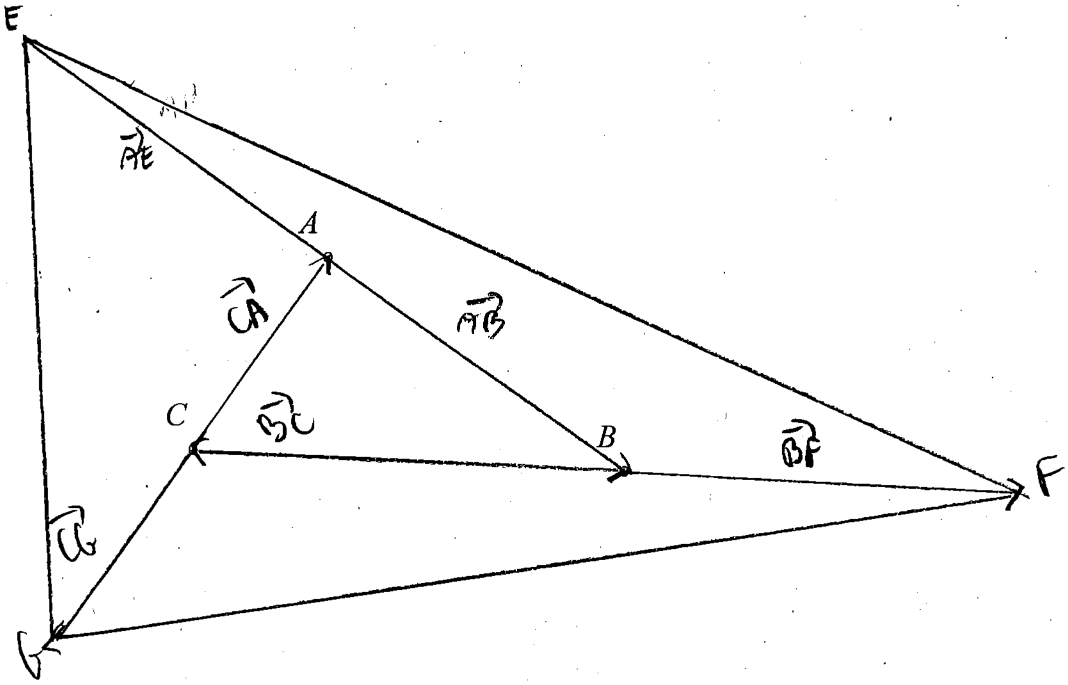
Identifier clairement sur ce repère le(s) nombres c obtenus via le théorème des accroissements finis. estimation : $c_1 \cong -2{,}8$; $c_2 \cong -0{,}2$; $c_3 \cong 0{,}7$

Exercice 6 (environ 10 points)

Soit ci-dessous trois point quelconques A, B et C du plan, non alignés.
On considère le triangle ΔABC .

A partir de cette première figure, on définit un nouveau triangle ΔEFG avec $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{CA}$.

(a) Représenter cette situation.



/3

(b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AG} = +2\overrightarrow{AC} + 0\cdot\overrightarrow{AB}$ /1

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-1)\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ /1

$\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 2[-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}] + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ /2

(c) Démontrer à l'aide du calcul vectoriel que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF})$

$= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ /4

Exercice 7 *(environ 6 points)*

(/16)

Soient $A(3;-1;2)$, $B(4;4;-1)$, $C(8;5;-6)$ et $D(7;0-3)$ quatre points de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$

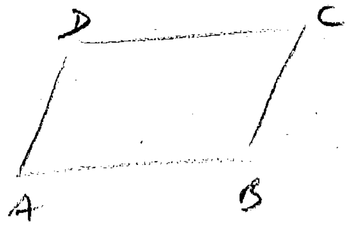
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix}4-3\\4+1\\-1-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{35}$$

/3

(b) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}8-7\\5-0\\-6+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$$



/3

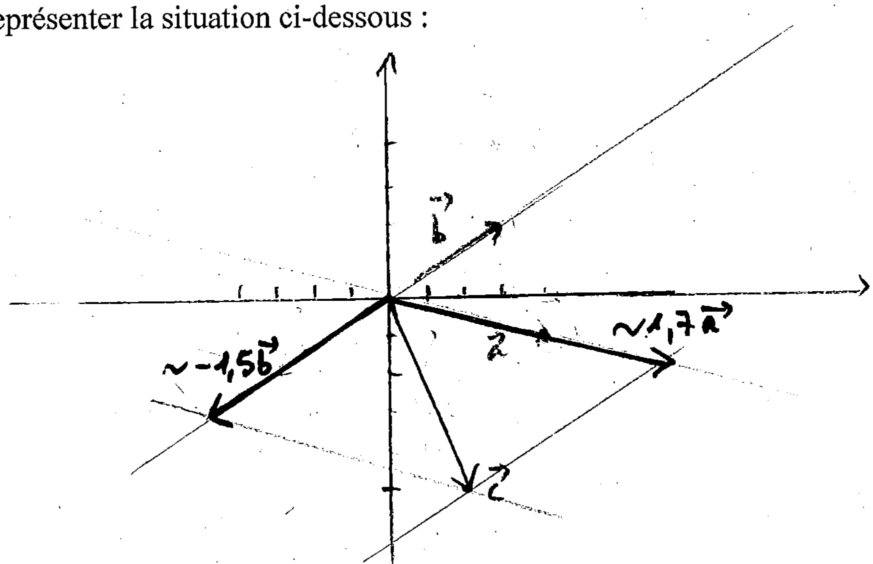
donc ABCD est bien un parallélogramme

Exercice 8 (environ 12 points)

/12

Soit $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

(a) Représenter la situation ci-dessous :



/2

(b) On considère les points $A(-2;3)$ et $B(3;4)$. Calculer les coordonnées du point E situé au quart (à partir de A) du segment $[AB]$.

$E = (x;y)$ tel que

$$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3+2\\4-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/4\\1/4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \\ y = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \end{cases} \qquad E = \left(-\frac{3}{4} ; \frac{13}{4}\right)$$

/4

(c) On souhaite exprimer le vecteur $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

i. Déterminer graphiquement une réponse approximative sur le repère ci-dessous ; la réponse est : $\vec{c} \cong 1,7\vec{a} - 1,5\vec{b}$

/2

ii. Déterminer algébriquement une réponse exacte.

$$\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\alpha+3\beta\\-\alpha+2\beta\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}①\\②\end{matrix}\begin{cases}2 = 4\alpha+3\beta\\-5 = -\alpha+2\beta\end{cases}$$

$$\begin{matrix}①\\4\cdot①\end{matrix}\begin{cases}2 = 4\alpha+3\beta\\-20 = -4\alpha+8\beta\end{cases}$$

$$-18 = 11\beta$$

$$\beta = -\frac{18}{11} \qquad \text{dans ② : } -5 = -\alpha + 2\cdot\left(-\frac{18}{11}\right)$$

$$\alpha = 5 - \frac{36}{11} = \frac{19}{11}$$

/4

donc $\vec{c} = \frac{19}{11}\vec{a} - \frac{18}{11}\vec{b} \cong 1,7\vec{a} - 1,6\vec{b}$