Collège de Saussure **Epreuve de mathématiques de 3e année, niveau normal**	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	28 novembre 2019
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; • tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : .... Prénom : .... Groupe : ....

Répartition des points

Exercice 1: 18 points

Exercice 2: 21 points

Exercice 3: 8 points

Exercice 4 : 10 points

Exercice 5 : 13 points

Total final : .... / 70 points

Notations : .... → .... / 2 points

Français (facultatif) : .... → .... / 1 point

Total final : .... / 72 points

Note : ..../ 6

Exercice 1 (environ ~~13~~ 12 points)

En utilisant les formules vues au cours, déterminer les dérivées des fonctions réelles suivantes; donner une ne comprenant aucun exposant négatif ou fractionnaire ;

(a) $(x^2-3)' = (x^2)' - (3)' = 2x - 0 = 2x$ /2

(b) $\left(\frac{2}{x^5}\right)' = \left(2\cdot\frac{1}{x^5}\right)' = 2\left(\frac{1}{x^5}\right)' = 2\cdot\left[\frac{-(x^5)'}{(x^5)^2}\right] = -\frac{2\cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{-10}{x^6}$

ou $= (2x^{-5})' = 2(x^{-5})' = 2\cdot[-5x^{-5-1}] = -10x^{-6} = \frac{-10}{x^6}$ /3

(c) $(\sqrt{2x^3-3})' = [(2x^3-3)^{1/2}]' = \frac{1}{2}(2x^3-3)^{-1/2}\cdot(2x^3-3)'$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x^3-3}}\cdot 6x^2 = \frac{x}{\sqrt{2x^3-3}}$ /4

(d) $[x^3\cdot(x^3-1)]' = (x^3)'\cdot(x^3-1) + x^3\cdot(x^3-1)' = 3x^2(x^3-1) + x^3\cdot 3x^2$

FACT. $\left(= 3x^2[(x^3-1) + x^3] \right.$

$\left. = 3x^2[2x^3-1] \right)$

ou

$= [x^6 - x^3]' = (x^6)' - (x^3)'$

$= 6x^5 - 3x^2$ /3

FACT. $(= 3x^2(2x^3-1))$

(e) $[(x-\frac{1}{x})^{10}]' = 10\left(x+\frac{1}{x}\right)^9 \cdot \left(x+\frac{1}{x}\right)'$

$= 10\left(x+\frac{1}{x}\right)^9 \cdot \left(1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right)$

$= 10\left(x+\frac{1}{x}\right)^9\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

/3

FACT $\left(= 10\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^9\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \right)$

(f) $\left[\frac{3x}{x^2+x}\right]' = \frac{(3x)'(x^2+x) - 3x(x^2+x)'}{(x^2+x)^2}$

$= \frac{3(x^2+x) - 3x(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

FACT $\left(= \frac{3x^2+\cancel{3x}-6x^2-\cancel{3x}}{[x(x+1)]^2} \right.$

$\left. = \frac{-3x^2}{x^2(x+1)^2} \right)$

/3

Exercice 2 (environ 25 points)

On considère la fonction réelle f définie par $f(x)=\sqrt{2+x}$.

(a) Déterminer $f'(x)$ à partir de la définition de la dérivée.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+(x+h)}-\sqrt{2+x}}{h}\left(\cdot\frac{\sqrt{2+x+h}+\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x+h}+\sqrt{2+x}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{2}+\cancel{x}+h)-(\cancel{2}+\cancel{x})}{h\left(\sqrt{2+x+h}+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{2+x+h}+\sqrt{2+x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+x+0}+\sqrt{2+x}}=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

/4

(b) Déterminer $f'(x)$ à l'aide des formules de dérivation.

$$\left(\sqrt{2+x}\right)'=\left((2+x)^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}(2+x)^{-1/2}\cdot(2+x)'$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2+x}}\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

/3

(c) Enoncer précisément le théorème « Equation de la tangente ».

Si f est dérivable en a, alors l'équation de la tangente à (la courbe représentative de) f en $(a; f(a))$ est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

/3

(d) Déterminer l'équation de la tangente t à la courbe représentative de f au point $(-1\,; f(-1))$.

$f(-1) = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$

$f'(-1) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$

$t : y = \frac{1}{2}(x+1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

/3

(e) Déterminer algébriquement la(les) équation(s) de(s) tangente(s) de pente $+\frac{1}{4}$.

$f'(x) = \frac{1}{4} \iff \frac{1}{2\sqrt{2+x}} = \frac{1}{4} \iff 2\sqrt{2+x} = 4$

$\iff \sqrt{2+x} = 2$) car $\sqrt{4} = 2$

$\iff x = 2$

/2

on cherche l'éq. de la tg à f en $a = 2$:

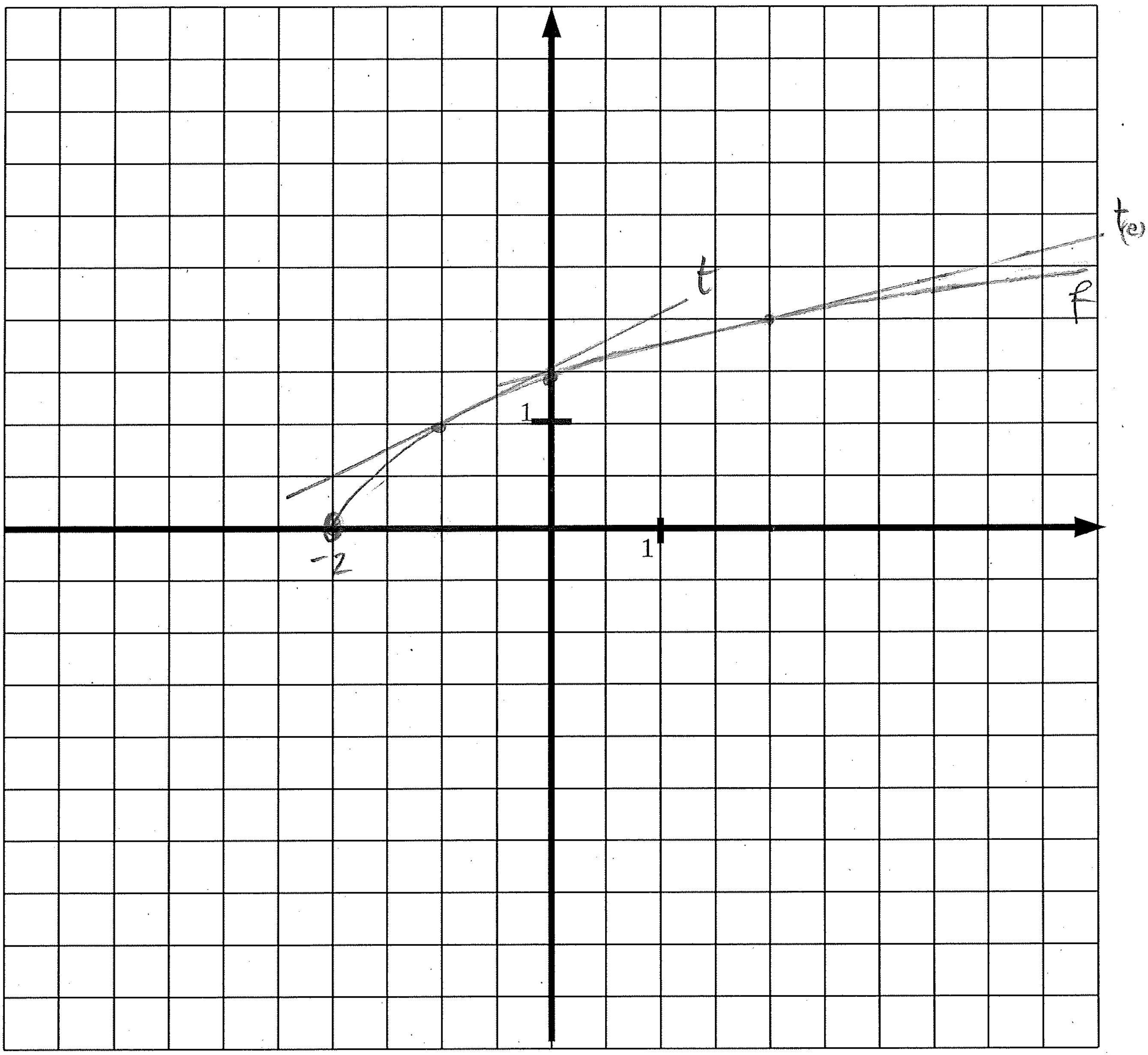
$f(2) = \sqrt{4} = 2$ (et $f'(2) = \frac{1}{4}$, on le sait déjà)

équation : $y = \frac{1}{4}(x-2) + 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

(il n'y a qu'une telle tangente)

/2

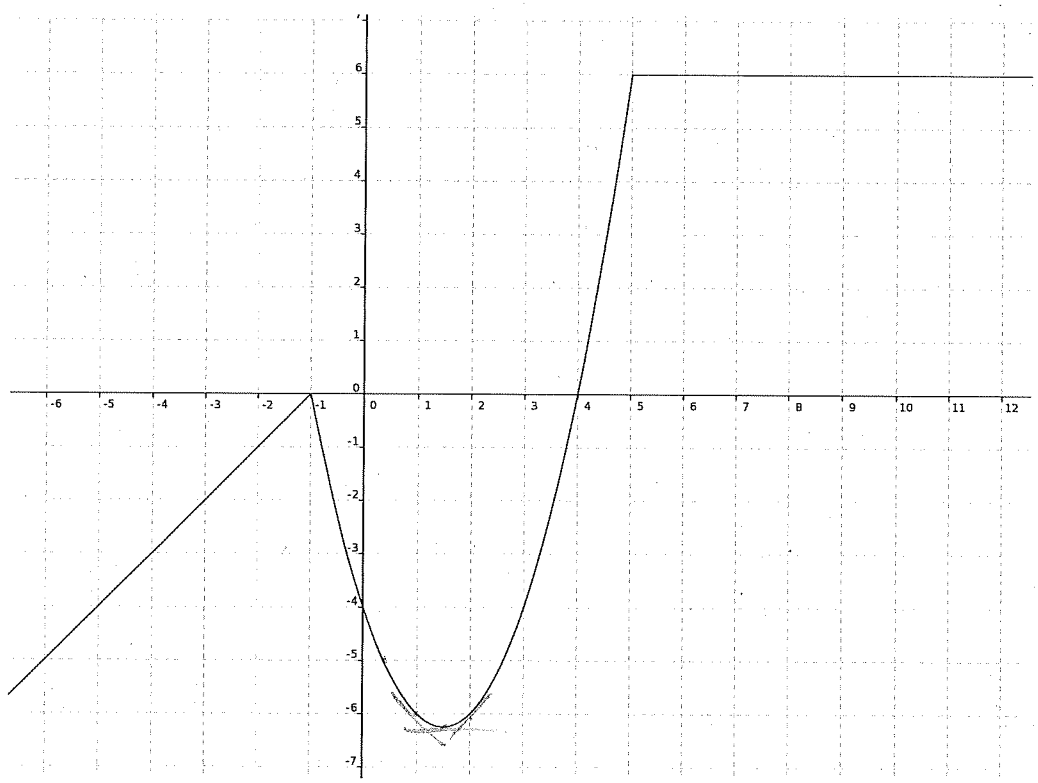
(f) Représenter graphiquement dans le même repère ci-dessous f, t et la(les) tangente(s) de (e)

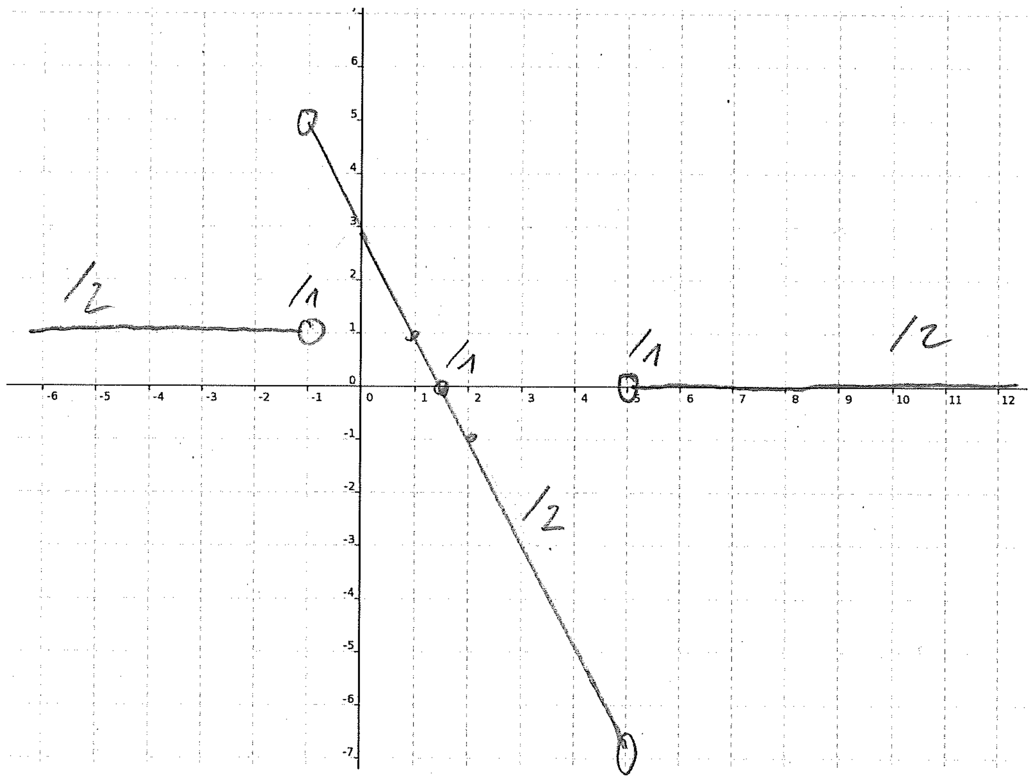


$\frac{1}{6}$

Exercice 3 (environ 8 points)

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction réelle f. Tracer soigneusement une esquisse d'une représentation graphique de la fonction dérivée f' de f dans le repère supplémentaire fourni ci-dessous :





Exercice 4 (environ 10 points)

Esquisser la représentation graphique d'une (une seule!) fonction f qui vérifie toutes les conditions ci-dessous :

(a) f n'a pas de zéro /1

(b) $f'(0) = 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $a=0$ /2

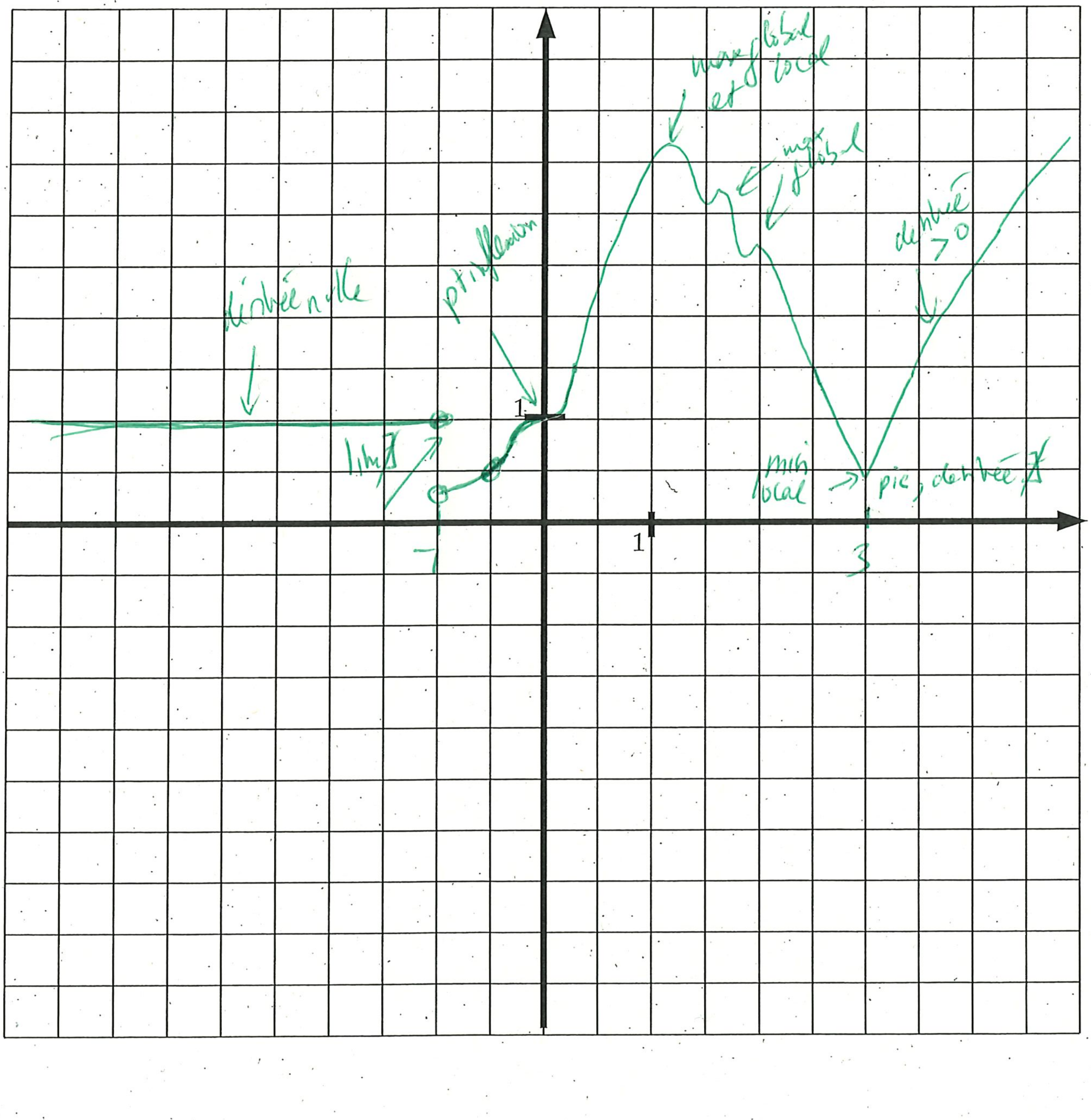
(c) f admet un un minimum (local) en $a=3$ et $f'(3)\neq 0$ /2

(d) $f'(x)>0$ sur $]3\,;4[$ /1

(e) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas /1

(f) $f'(x)=0$ sur $]-4\,;-1[$ /1

(g) f a exactement 3 maxima (locaux) et 1 maximum (~~locaux~~ global) sur]-1;4[/2



Exercice 5 (environ 12 points)

Vrai ou faux ? Justifier.

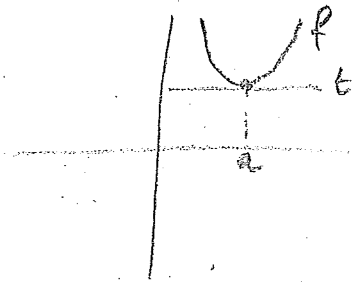
(a) Si f admet un point critique en a, alors $f(a) = 0$

FAUX :

contre-ex alg
$f(x) = x^2 - 1$
$f'(x) = 2x$
0 est un pt critique (zéro de $f'(x)$), mais $f(0) = -1 \neq 0$

ou

contre-ex géom



f admet un pt critique en a ($f'(a)=0$)
mais $f(a) \neq 0$

/4

(b) Si f admet un point critique en a, alors $f'(a) = 0$

VRAI :

f admet pt critique en a [hyp]

donc $f'(a) = 0$ [déf "pt critique"]

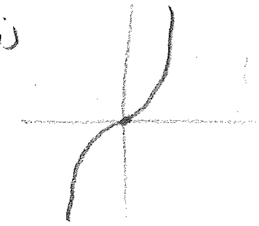
/3

(c) Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum en a

FAUX : c-exemple $f(x) = x^3$

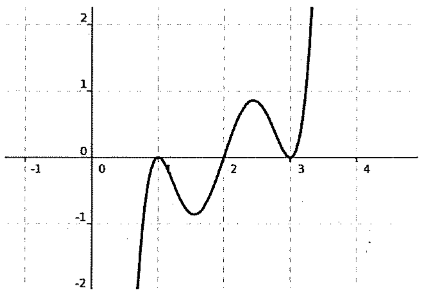
$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$, donc f admet un pt critique en 0

mais  f n'admet pas d'extremum en 0

/3

(d) Si la représentation graphique ci dessous est celle de la dérivée f' d'une fonction f



alors f admet un minimum (local) en 2.

les signe et zéros de $f'(x)$ donnent le comportement de $f(x)$

x		1		2		3	
$f'(x)$	−	0	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘		↘	min	↗		↗

donc f admet bien un minimum en 2

c'est VRAI

/4