Collège de Saussure Epreuve de mathématiques de 3e année, niveau normal	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	31 octobre 2019
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire les feuilles quadrillées fournies en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; • tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : ....Prénom : .... Groupe : ....

Répartition des points

Exercice 1: 20 points

Exercice 2: 6 points

Exercice 3: 7 points

Exercice 4: 10 points

Exercice 5 : 9 points

Exercice 6 : 14 points

Exercice 7: 10 points

Total final : .... / 76 points

Notations : .... → .... / 2 points

Retour et auto-évaluation de la fiche de suivi : .... / 1 point

Français (facultatif) : .... → .... / 1 point

Total final : .... / 79 points

Note : ..../ 6

15/30

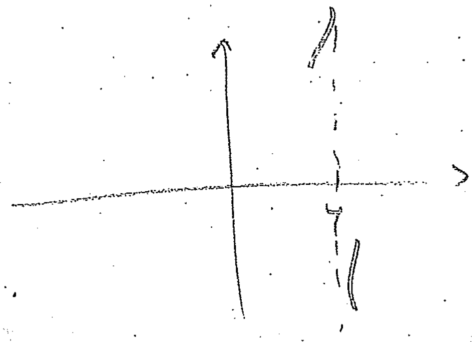
Exercice 1 (environ 20 points)

Calculer si possible les limites suivantes et interpréter graphiquement le résultat :

(a) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x}{4-x}\right) =$ " $\dfrac{4}{0}$ " : type " $\dfrac{1}{0}$ " ⇒ lim à dr et à g

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$ } donc $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ∄ /2

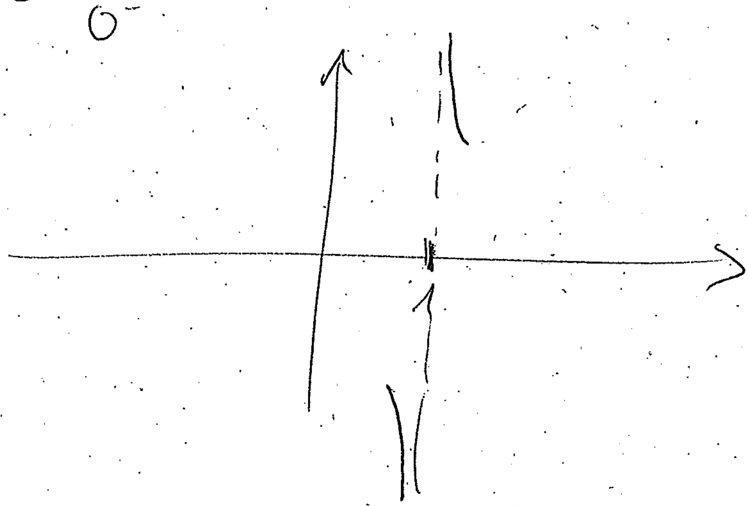


/1

(b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7x+2}-1}{x-1} =$ " $\dfrac{\sqrt{7+2}-1}{1-1}$ " = " $\dfrac{2}{0}$ " type " $\dfrac{1}{0}$ "

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

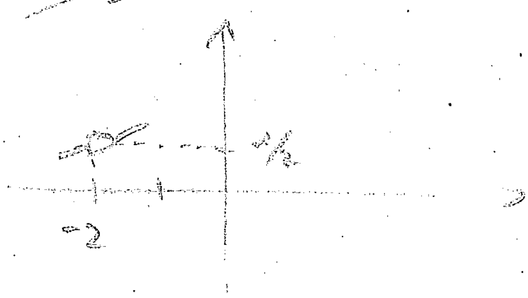
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ } donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ∄ /3



/1

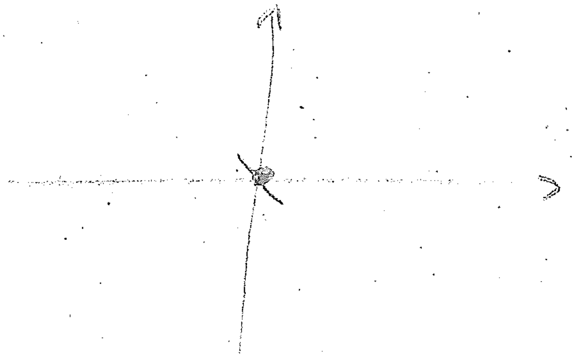
(c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x} =$ $\text{"}\dfrac{4-6+2}{4-4}\text{"} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{x\cancel{(x+2)}} = \dfrac{-2+1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ /2



/1

(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{-x}{(x+1)^3}\right) =$ $\dfrac{-0}{1^3} = 0$ /2

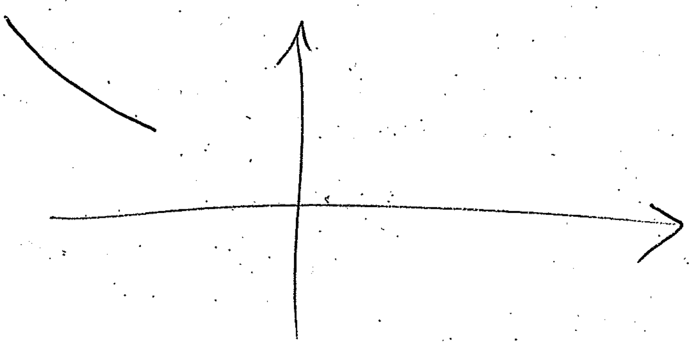


/1

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+200000= (-\infty)^2-3(-\infty)+200\,000$

$=(+\infty)+(+\infty)+200\,000$

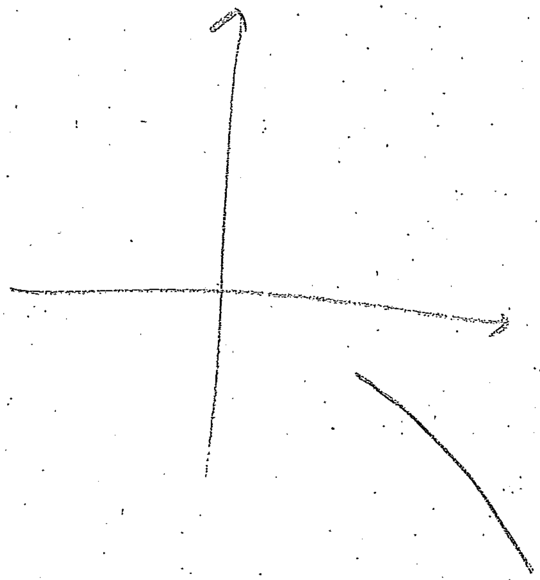
$=+\infty$



(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+3x-200000\right)=-(+\infty)^2+3(+\infty)-200\,000$

$=-(+\infty)+(+\infty)-200\,000=-\infty+\infty$ indét.

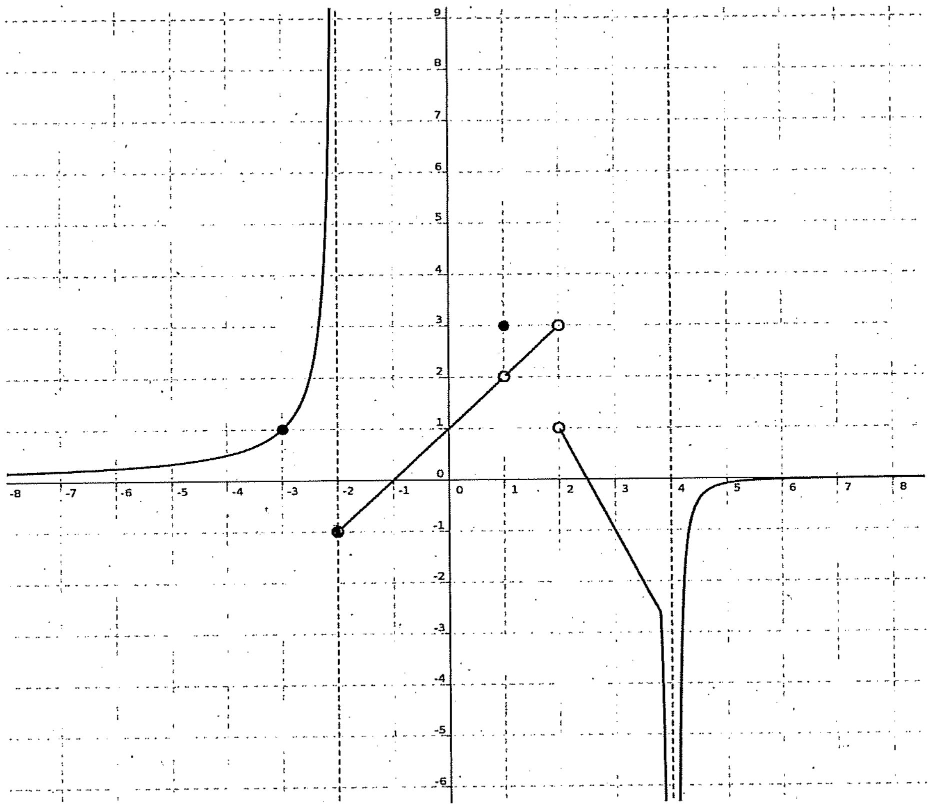
$=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{200\,000}{x^2}}_{\to 0}\right)=(+\infty)^2(-1)=-\infty$ /3



/1

Exercice 2 (environ 10 points)

On considère une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous une représentation graphique :



(a) Déterminer graphiquement :

i. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$ 1/1

ii. $Z_f = \{-1; 2,5\}$ 1/1

(b) Déterminer graphiquement :

i. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -1$

iii. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \not\exists$ 1/2

iv. $f(-2) = -1$

(c) Déterminer graphiquement :

i. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

ii. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ 1/2

iii. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

iv. $f(1) = 3$

(d) Déterminer graphiquement :

i. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$

ii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ 1,5

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \not\exists$

(e) Déterminer graphiquement :

i. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

ii. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ 1,5

iii. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$

(f) Déterminer graphiquement :

i. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$ 1/1

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Exercice 3 (environ 7 points)

Esquisser la représentation graphique d'une (une seule!) fonction f qui vérifie <u>toutes</u> les conditions ci-dessous :

(a) $Z_f = \{-5;0\}$ /1

(b) $\lim_{x\to-1} f(x)=4$ /0.5

(c) $\lim_{x\to-3} f(x)=+\infty$ /1

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ /0.5

(e) $\lim_{x\to1} f(x)$ n'existe pas et $f(1)=-1$ /1

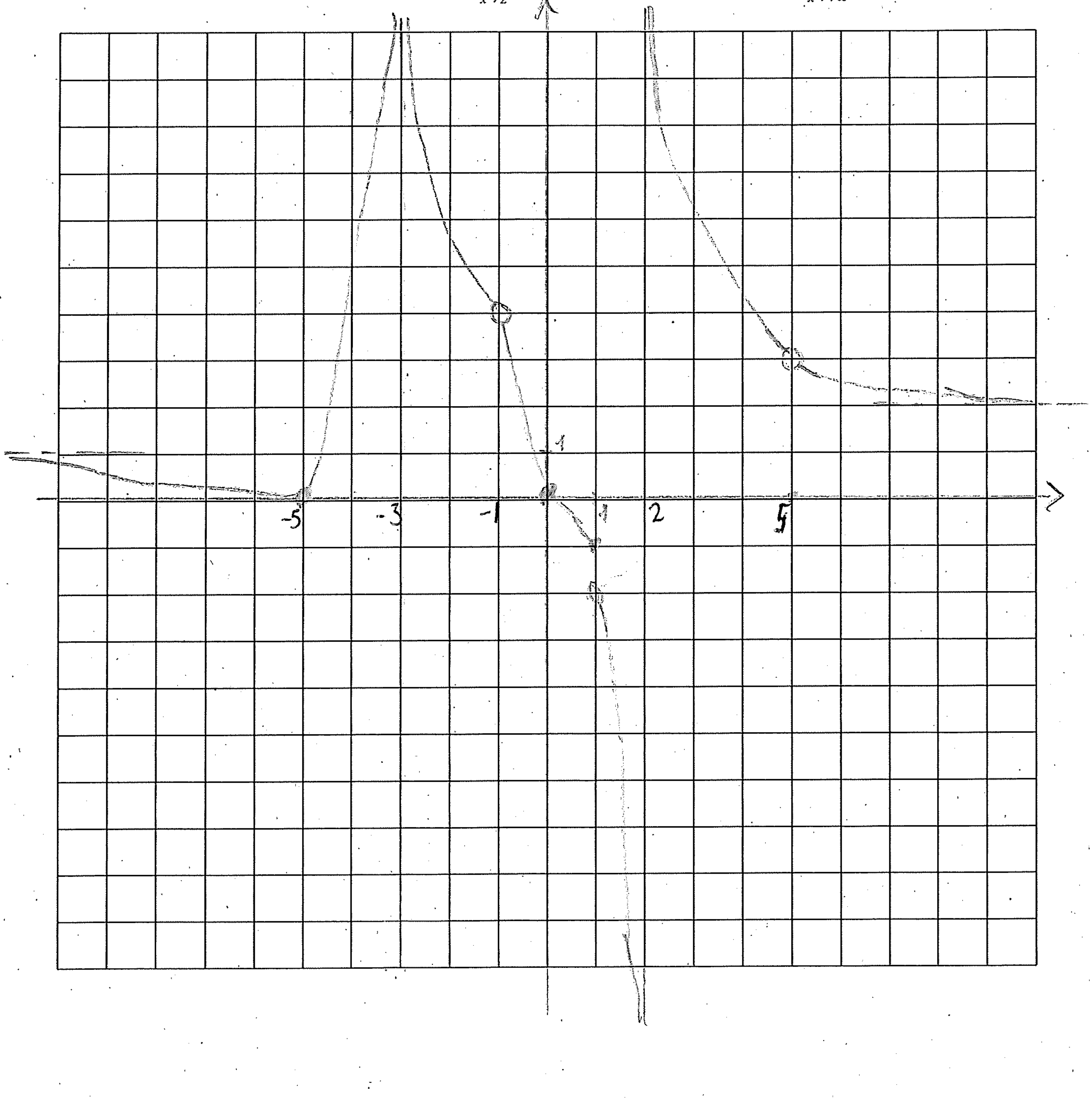
(f) $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ /0.5

(g) $\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ /0.5

(h) $\lim_{x\to5} f(x)=3$ et $f(5)$ n'existe pas /1

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ /0.5

fct: /0.5



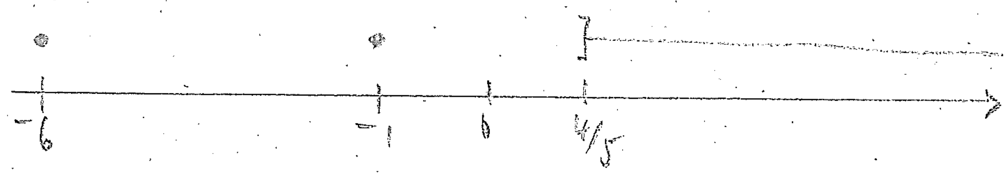
Exercice 4 *(environ 9 points)*

(a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{\sqrt{-5x+4}}{-x^2-7x-6}$.

Pb si $-x^2-7x-6=0$
$\Leftrightarrow x^2+7x+6=0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0$
$x=-1$ ou $x=-6$
/2

Pb si $-5x+4<0$
$\Leftrightarrow -5x<-4$
$\Leftrightarrow x>4/5$
/2

Pbs :



donc $D_f=\left]-\infty\,;\frac{4}{5}\right]\setminus\{-6\,;-1\}$ /2

(b) Donner la définition mathématique d'une « fonction ».

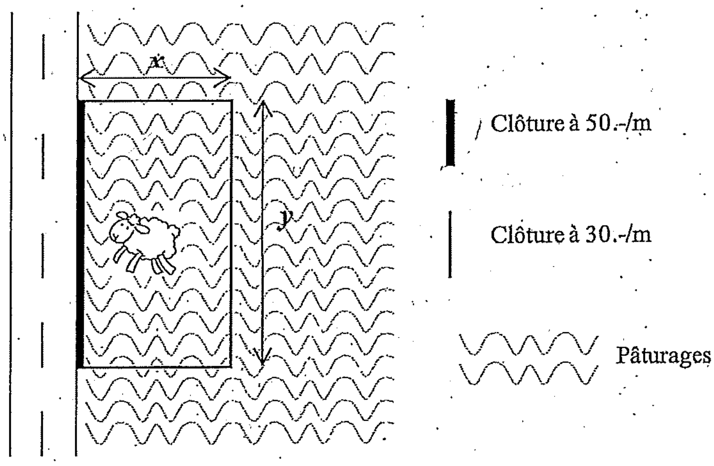
Une fonction est définie par la donnée :
- d'un ensemble de départ A.
- d'un ensemble d'arrivée B
- d'une relation qui à tout élément de A associe
au plus un élément de B. /3

Exercice 5 (environ 12 points)

On souhaite construire un enclos rectangulaire qui longe une route rectiligne sur l'un de ses côtés. On pose x et y les longueurs en mètres des côtés de l'enclos (voir figure ci-contre).

Une entreprise facture :

- 400 francs de frais de déplacement
- 50 francs le mètre pour clôturer le long de la route
- 30 francs le mètre pour clôturer les trois autres côtés



(a) Exprimer en fonction de x et y le coût total C facturé par l'entreprise pour construire un enclos.

$C = 400 + 50y + 30 \cdot 2x + 30 \cdot y$
$= 400 + 80y + 60x$

/3

(b) Montrer que, si l'on fixe le coût total à 10'000 francs, l'aire A de la surface de l'enclos en fonction de la longueur de son côté x est donnée par la fonction $A(x) = \frac{-3}{4}x^2 + 120x$

$C = 400 + 80y + 60x = 10\,000 \Leftrightarrow 80y = -60x + 9600$
$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 120$

d'où $A(x) = x \cdot y$
$= x \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 120\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 120x$

/3

(c) Quelle est l'aire maximale de l'enclos que l'on pourra faire construire par cette entreprise pour un montant de 10'000 Frs ?

On cherche le sommet : $k = -\frac{b}{2a} = \frac{-120}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{120}{\frac{3}{2}} = \frac{240}{3} = 80$

$m = -\frac{\Delta}{4a}$ ou $m = f(k)$

$= -\frac{3}{4}\cdot 80^2 + 120\cdot 80$

$= -4800 + 9600$

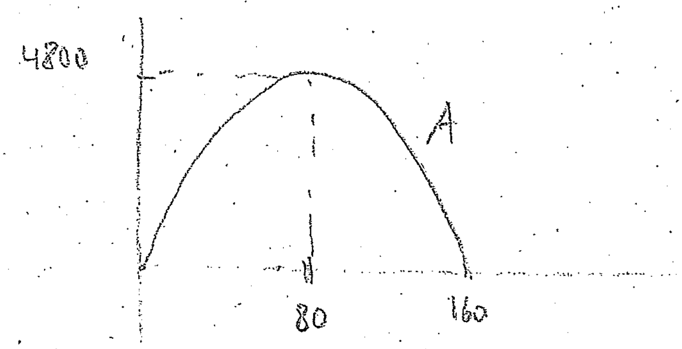
$= 4800$

$S = (80 ; 4800)$

/3

L'aire maximale vaut $4800\ m^2$

(d)



/3

Exercice 6 (environ 10 points)

Vrai ou faux ? Justifier.

(a) Le point P(2;-1) appartient-il au cercle d'équation $(x-3)^2+(y-5)^2=36$?

$(2-3)^2+(-1-5)^2 \overset{?}{=} 36$

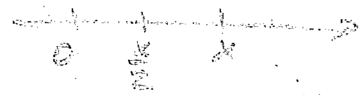
$\Leftrightarrow 1+36 \neq 36$

non, donc $(2;-1) \notin$ cercle

c'est faux

/3

(b) Il n'existe aucun nombre positif non nul $x \in \mathbb{R}$ qui soit plus petit que n'importe quel nombre réel positif.

Vrai : supposons qu'un tel $x > 0$ existe : 

alors on aurait $0 < \frac{x}{2} < x$

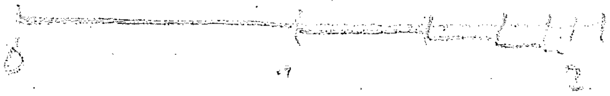
ce qui contredit le fait que x soit le plus petit tel nombre

/4

(c) Une somme infinie de nombres strictement positifs est toujours infinie.

faux, contre-exemple :

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$



cette somme ne pourra jamais dépasser 2

(on peut montrer qu'elle vaut 2)

/4