Epreuve semestrielle de mathématiques, 3MA1 - Corrigé (déc 19)

Question 1 :

a) f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

b) $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{a+1}}{x-a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{(a+1) - (x+1)}{(x+1)(a+1)} \cdot \frac{1}{x-a} \right) =$

$\lim_{x \to a} \frac{a-x}{(x+1)(a+1)(x-a)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{-\cancel{(x-a)}}{(x+1)(a+1)\cancel{(x-a)}} \right) = \frac{-1}{(a+1)(a+1)} = \frac{-1}{(a+1)^2}$

Donc $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

Question 2 :

a) $t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 2$

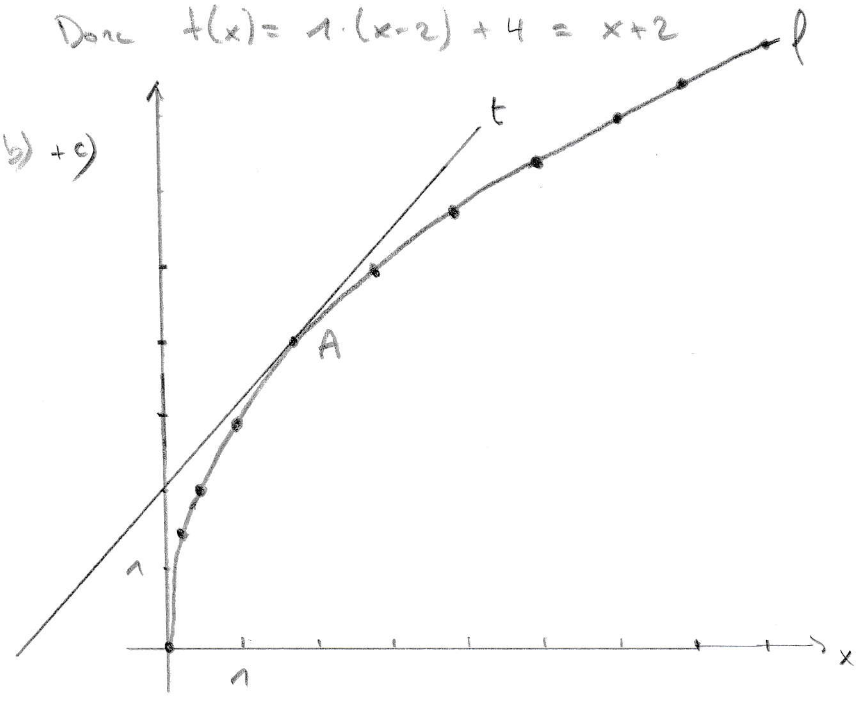
$f(2) = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} = 4$

$f'(x) = \left(2 \cdot (2x)^{1/2}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{2}{(2x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{2x}}$

$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 2}} = 1$

Donc $t(x) = 1 \cdot (x-2) + 4 = x + 2$

b) + c)



Question 3 :

a) $f(x) = \pi x^3 + \frac{2x}{3} \Rightarrow f'(x) = 3\pi x^2 + \frac{2}{3}$

b) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-4)'(x^2-4) - (x^2-4)'(2x-4)}{(x^2-4)^2} =$

$$= \frac{2(x^2-4) - 2x(2x-4)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 8x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 8}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+4x-4)}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{-2(x-2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{-2}{(x+2)^2}$$

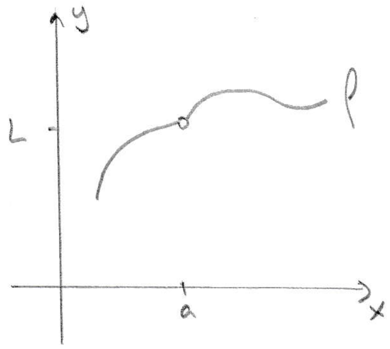
Question 4 :

a) Vraie, par définition de continue en a. Si f est continue en a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Nécessairement, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

b) Fausse, par exemple : $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$ avec $a = -1$.

On a $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$ mais $f(-1)$ n'existe pas donc f n'est pas continue en a.

Un autre exemple :



$L = \lim_{x \to a} f(x)$ mais

$f(a)\ \nexists$

$\Rightarrow f$ pas continue en $x = a$.

Question 5 :

a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-16)(2+\sqrt{x})}{2-x} = \frac{0\cdot 4}{2} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{4^2+3\cdot 4+2}{4^2-4} = \frac{30}{12} = \frac{15}{6}$$

Question 6 :

a) $$x^2-2x-3=0 \iff (x-3)(x+1)=0 \iff x=3 \text{ ou } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{(x^2+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{aligned}\right\} \text{A.V. en } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{10}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{10}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \text{A.V. en } x=3$$

$\deg(x^2+1) = \deg(x^2-2x-3)$ donc asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+1/x^2)}{\cancel{x^2}(1-2/x+3/x^2)} = 1$$ donc A.H. en $y=1$

De même, on a $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

b) On a $D_{f'} = \{-1; 3\}$ (point a) et $f'(x)=0 \iff$

$$\frac{-2(x^2+4x-1)}{(x^2-2x-3)^2} = 0 \iff -2(x^2+4x-1)=0 \iff x^2+4x-1=0$$

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2} = -2\pm\sqrt{5} \iff Z_{f'} = \{-2\pm\sqrt{5}\}$$

Le tableau est donc :

		$-2-\sqrt{5}$		-1		$-2+\sqrt{5}$		3	
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
(x^2+4x-1)	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x^2-2x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	A.V.	$\nearrow$	max	$\searrow$	A.V.	$\searrow$

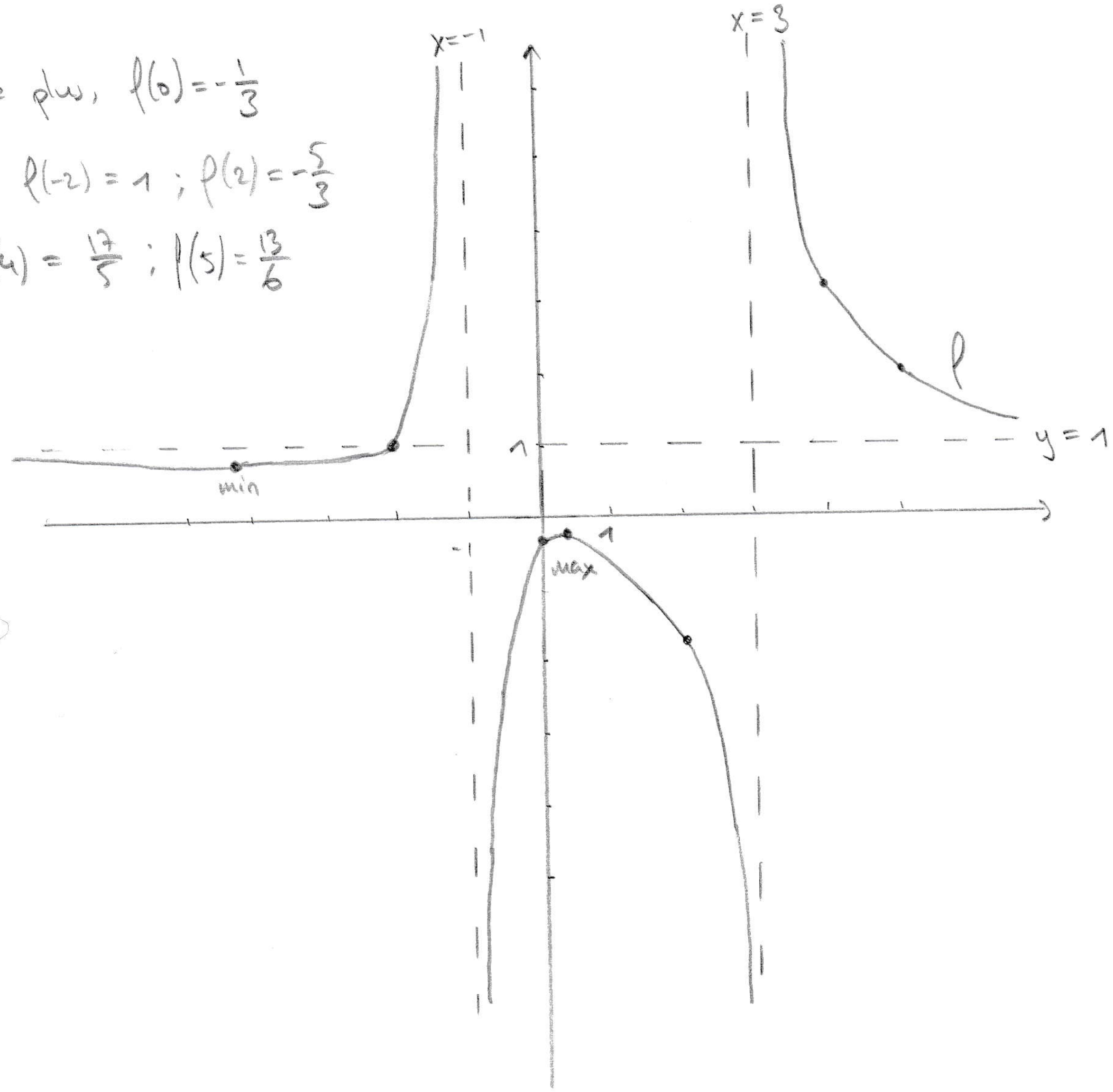
c) On a donc un minimum local en $(-2-\sqrt{5}\,;\, f(-2-\sqrt{5})) \simeq (-4{,}24\,;\,0{,}81)$

et un maximum local en $(-2+\sqrt{5}\,;\, f(-2+\sqrt{5})) \simeq (0{,}24\,;\,0{,}31)$

d) De plus, $f(0) = -\frac{1}{3}$

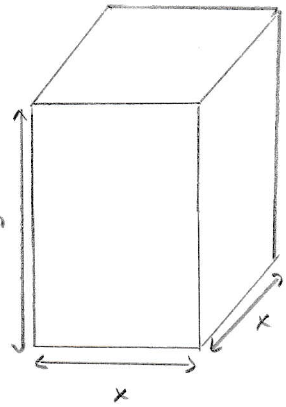
et $f(-2) = 1$; $f(2) = -\frac{5}{3}$

$f(4) = \frac{17}{5}$; $f(5) = \frac{13}{6}$



Question 7 :

a) Schéma



On doit avoir $500 = x^2 \cdot h$

$\Leftrightarrow \frac{500}{x^2} = h$

$$\text{Prix total} = \underbrace{x^2 \cdot 500}_{\text{prix sol}} + \underbrace{x^2 \cdot 3000}_{\text{prix plafond}} + \underbrace{x \cdot h \cdot 1000}_{\text{prix paroi}} \cdot \underbrace{4}_{\text{nbr. de parois.}}$$

$$P(x) = 3500x^2 + 4000\,xh$$

$$= 3500x^2 + 4000 \cdot x \cdot \frac{500}{x^2}$$

$$= 3500x^2 + \frac{2000000}{x}$$

b) $P'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(3500x^2 + 2000000\,x^{-1}\right)' = 0$

$$\Leftrightarrow 7000x + 2000000\,(-1)\,x^{-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7000x - \frac{2000000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 7x - \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 - 2000 = 0 \Leftrightarrow 7x^3 = 2000 \Leftrightarrow x^3 = \frac{2000}{7}$$

$x^3 = \sqrt[3]{\frac{2000}{7}} \cong 6.586$ et $h = \frac{500}{x^2} = \frac{500}{\left(\sqrt[3]{\frac{2000}{7}}\right)^2} \cong 11,526$

Il s'agit d'un minimum car :

		$\cong 6.586$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

Pour que le coût soit minimal, il faut que la longueur du côté de la base carrée soit d'environ 6,586 m. et la hauteur de 11,526 m.

Question 7 :

a) $f(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 + a}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^4+6x^2+a)' \cdot x - (3x^4+6x^2+a)(x)'}{x^2}$

$= \frac{(12x^3 + 12x)x - (3x^4 + 6x^2 + a) \cdot 1}{x^2} = \frac{12x^4 + 12x^2 - 3x^4 - 6x^2 - a}{x^2}$

$= \frac{9x^4 + 6x^2 - a}{x^2}$

On veut $f'(1) = 0$ donc $\frac{9 \cdot 1^4 + 6 \cdot 1 - a}{1^2} = 0 \Leftrightarrow 15 - a = 0 \Leftrightarrow a = 15$

car tangente horizontale en $P(1, f(1))$

b) $a = -1 \Rightarrow f'(x) = \frac{9x^4 + 6x^2 + 1}{x^2} = \frac{(3x^2+1)^2}{x^2} = \left(\frac{3x^2+1}{x}\right)^2$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3x^2+1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+1}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R}$

Comme $f'(x) = 0$ n'a pas de solution, il n'y a donc pas d'extremum local

(car thm " f admet un extremum local en $x = a \Rightarrow f'(a) = 0$ " (f dérivable sur I)

contraposée : " $f'(a) \neq 0 \Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum local en $x = a$ ")