Que dire de la « règle des signes » ?

Jusqu'où se poser des questions en math?

Jusqu'où peut-on/doit-on expliquer le pourquoi des choses?

...

Prérequis et activités de découverte

Dans ce cas particulier, acceptons de « savoir »:

- ce que sont les nombres entiers relatifs
- qu'il existe deux opérations entre eux : l'addition et la multiplication

Nous acceptons aussi des « axiomes »:

- qu'un nombre – zéro, qu'on note 0 – joue un rôle particulier par rapport à l'addition: $0+n=n+0=0$ pour tout entier n
  ex : 0+3=3+0=0 */ on dit que 0 est un **élément neutre** pour l'addition*
- qu'un nombre – un, qu'on note 1 – joue un rôle particulier par rapport à la multiplication: $1 \bullet n=n \bullet 1=1$ pour tout entier n
  ex : 1•3=3•1=3 */ on dit que 1 est un **élément neutre** pour la multiplication*
- que tout entier *n* admet un **opposé**, noté -*n,* càd un nombre qui additionné à lui donne 0
  ex : 2 + (-2) = 0 *ou* 1 + (-1) = 0

Prérequis et activités de découverte

- qu'il existe une propriété de la multiplication: $n \bullet m = m \bullet n$
  ex : 2•3 = 3•2 / on dit que la multiplication est ***commutative***
- qu'il existe une propriété de l’addition: $(n+m)+p = n+(m+p)$
  ex : (2+3)+4 = 2+(3+4) / on dit que l’addition est ***associative***
- qu'il existe une propriété qui lie addition et multiplication
  ex : 2•(3+3)=2•3+2•3 / on parle de ***distributivité***

Et enfin deux propriétés (qui peuvent être déduites d’autres axiomes) – on ne donne pas tous ces détails ici :

- $a=b$ et $b=c$ si et seulement si $a=c$
  on parle de ***transitivité***
- $a+b=a+c$ si et seulement si $b=c$

Prérequis et activités de découverte

Ce sont les « règles du jeu » initiales que nous acceptons en mathématique (on parlera d'**axiomes**) afin de pouvoir ensuite, à partir de ces premières informations, **démontrer** que $(-1)\bullet(-1)=1$!!!!

Prérequis et activités de découverte

On **démontre** d'abord que 0 agit de façon spéciale pour la multiplication :

$0\bullet 1 = (1 + (-1))\bullet 1$ *(car -1 est l'opposé de 1)*

$= 1\bullet(1 + (-1))$ *(par commutativité)*

$=1\bullet 1 + 1\bullet(-1)$ *(par distributivité)*

$=1 + (-1)$ *(car 1 est l'élément neutre pour la multiplication)*

$=0$ *(car -1 est l'opposé de 1)*

De même, on pourrait montrer que $0\bullet n=0$ pour tout entier n

*On dit que 0 est un **élément absorbant** pour la multiplication*

Prérequis et activités de découverte

Et enfin, on **démontre** que (-1)•(-1)=1:

d'une part, on a:

(1 + (-1))•(-1)=0•(-1) *(car -1 est l'opposé de 1)*

=0 *(car on vient de démontrer que 0 est élément absorbant pour la multiplication)*

d'autre part, on a:

(1 + (-1))•(-1)=(-1)•(1 + (-1)) *(par commutativité)*

=(-1)•1 + (-1)•(-1) *(par distributivité)*

=(-1)+ (-1)•(-1) *(car 1 est l'élément neutre pour la mult)*

D'où, en égalisant les deux : (-1)+ (-1)•(-1)=0 *(a=b et b=c implique a=c)*

Prérequis et activités de découverte

$(-1)+(-1)\bullet(-1)=0$

$1+((-1)+(-1)\bullet(-1))=1+0$ *(a+b = a+c si et seulement si b=c)*

$(1+(-1))+(-1)\bullet(-1)=1+0$ *(associativité)*

$0+(-1)\bullet(-1)=1+0$ *(car -1 est l'opposé de 1)*

$(-1)\bullet(-1)=1$ *(car 0 est l'élément neutre pour l'addition)*