Conj : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

dém (absurde) supposons $\sqrt{3} = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$), fraction irréductible

$\Rightarrow 3 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 3q^2 \Rightarrow p^2$ multiple de 3

Or on a : $p \neq$ mult de 3 $\Rightarrow p^2 \neq$ mult de 3

[car : $p = 3k+1 \Rightarrow p^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$

ou $p = 3k+2 \Rightarrow p^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$

$\neq$ mult de 3

donc contraposée : $p^2$ mult de 3 $\Rightarrow p$ mult de 3

Ainsi $p = 3k \Rightarrow (3k)^2 = 3q^2 \Rightarrow 9k^2 = 3q^2 \Rightarrow 3k^2 = q^2$

$\Rightarrow q^2$ mult de 3 $\Rightarrow$ (idem) $q$ mult de 3

Donc $p/q$ peut être réduite (par 3). Absurde car elle est irréductible

Conj. $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

dém : cf ci-dessus. il suffit de voir que $p \neq$ mult de 6 $\Rightarrow p^2 \neq$ mult de 6

en effet :
$$p = \begin{array}{l} 6k+1 \\ 6k+2 \\ 6k+3 \\ 6k+4 \\ 6k+5 \end{array} \Rightarrow p^2 = \begin{array}{l} 36k^2+12k+1 \\ 36k^2+24k+4 \\ 36k^2+36k+9 \\ 36k^2+48k+16 \\ 36k^2+60k+25 \end{array} \begin{array}{l} = 6(6k^2+2k)+1 \\ = 6(6k^2+4k)+4 \\ = 6(6k^2+6k+1)+3 \\ = 6(6k^2+8k+2)+4 \\ = \underbrace{6(6k^2+5k+4)+1}_{\text{tous} \neq \text{mult de } 6} \end{array}$$

Conj $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$

dém (absurde) $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^3 = 2q^3 \Rightarrow p^3$ mult de 2

Or $p \neq$ mult de 2 $\Rightarrow p^3 \neq$ mult de 2

[car $p = 2k+1 \Rightarrow p^3 = 8k^3+12k^2+6k+1 = 2(4k^3+6k^2+3k)+1$
$\neq$ mult de 2 ]

... on conclut de la même façon...

**ex 5** Conj : $8\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dem (absurde) : supposons que $8\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

donc $8\sqrt{2} = p/q$ où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$

donc $\sqrt{2} = \frac{p}{8q}$

or $8q \in \mathbb{Z}^*$, donc $\sqrt{2}$ serait rationnel : absurde, car on a vu que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Conj : $\sqrt{12} \notin \mathbb{Q}$

dem : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Or on peut montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et donc conclure comme dans la conj. précédente

**ex 6** Conj $\sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$

dem (absurde) supposons $\sqrt[3]{4} = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$) irréductible

d'où $p^3 = 4q^3 \Rightarrow p^3$ multiple de 4

Or on a : $p \neq$ mult de 4 $\Rightarrow p^3 \neq$ mult de 4

$$\left[\text{car : } p = \begin{array}{l} 4k+1 \\ 4k+2 \\ 4k+3 \end{array} \Rightarrow p^3 = \begin{array}{l} 64k^3+48k^2+12k+1 = 4(16k^3+12k^2+3k)+1 \\ 64k^3+96k^2+24k+8 = 4(16k^3+24k^2+6k+2)+2 \\ 64k^3+144k^2+36k+27 = \underbrace{4(16k^3+36k^2+9k)+27}_{\neq \text{ mult de } 4} \end{array}\right]$$

d'où, par contraposée : $p^3$ mult de 4 $\Rightarrow p$ mult de 4

Ainsi : $p = 4k \Rightarrow (4k)^3 = 4q^3 \Rightarrow 16k^3 = q^3 \Rightarrow q^3$ mult de 4

$\Rightarrow q$ mult de 4

Et donc $p/q$ est réductible par 4, ce qui est absurde, car elle est irréductible