ex 7

a) $s_0 = 1$; $s_1 = 1$; $s_2 = 4/3$; $s_3 = 2$

b) $u_0 = -1$; $u_1 = 1/4$; $u_2 = -1/9$; $u_3 = 1/16$

c) $v_0 = 1$; $v_1 = 2$; $v_2 = 12$; $v_3 = 120$

rem : par défaut, si rien n'est indiqué, on part de n = 0 ; sinon le 1er n pour lequel on est bien défini

ex 8

a) $(1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots)_{n \geq 1}$

b) $u_n = \dfrac{n}{2n+1} \quad (n \geq 1)$

c) $\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot (-1)^{n+1} \quad (n \geq 1)$

ou

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

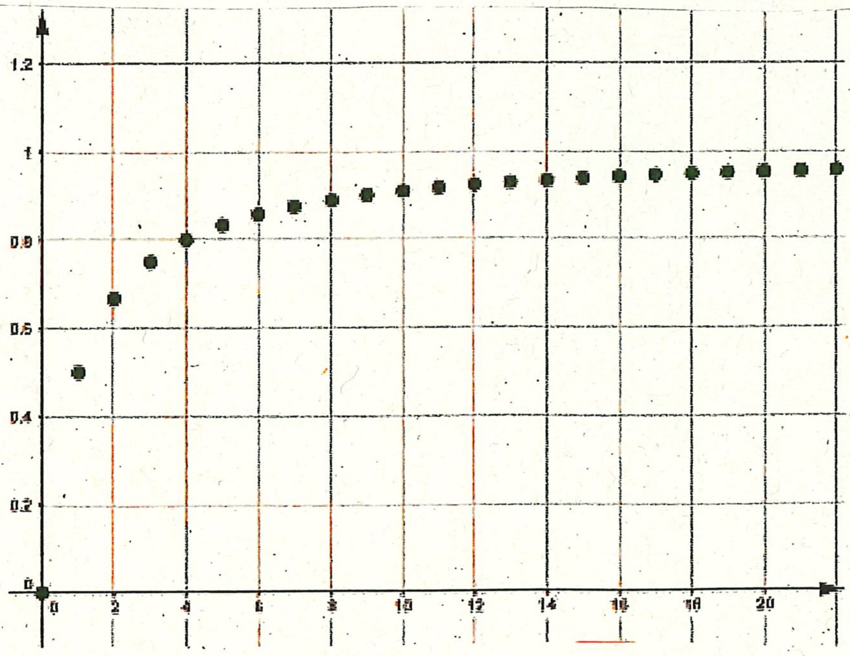
fonction (expression) définie par morceaux

d) $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n} \quad (n \geq 1)$

ou $u_n = \dfrac{-1}{(-2)^n}$

ex 9

a)



x9 (suite)

(b) (i)

$$|S_n - 1| < 0{,}1 \iff \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0{,}1$$

$$\iff \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| < 0{,}1$$

$$\iff \left|\frac{-1}{n+1}\right| < 0{,}1$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < 0{,}1$$

on cherche à isoler n...

$n+1 > 0$

$$\iff 1 < 0{,}1\cdot(n+1)$$

$\div 0{,}1$

$$\iff 10 < n+1$$

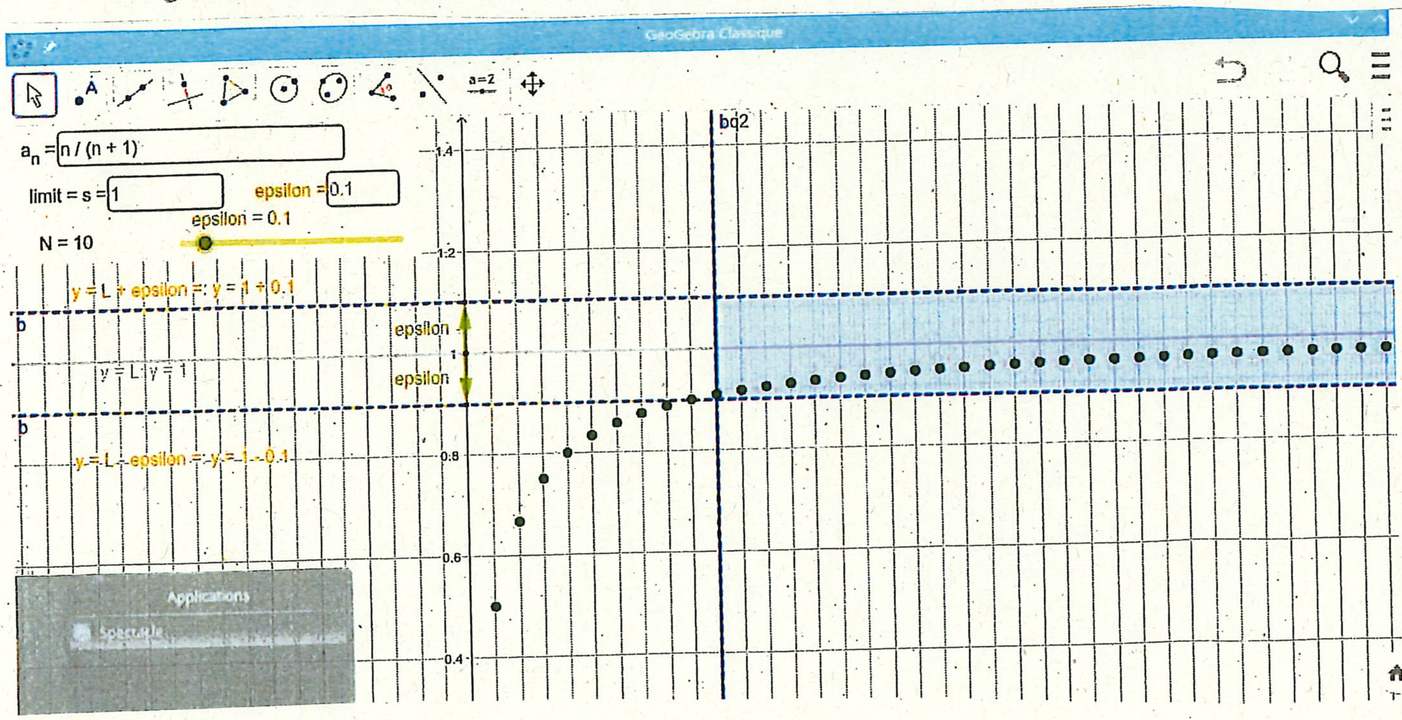
$$\iff 9 < n \iff 10 \leq n$$

càd : on cherche N tel que: $n \geq N \Rightarrow |S_n - 1| < 0$

dès que $N > 9 \iff N \geq 10$, on a bien:

$$n \geq N \geq 10 \Rightarrow |S_n - 1| < 0{,}1$$

On le voit bien avec GeoGebra:



ex9 (b)[iv] Idem pour $|s_n - 1| < 0,01$

$\iff \dots$

$\iff n > 99$

$\iff n \geq 100$

---

ex10 $\{s_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}_{n \geq 1}$

(a) $|s_n| < 0,1 \iff \frac{2}{n} < 0,1 \iff 20 < n$

si $n \geq N = 21$, on a $|s_n| < 0,1$

(b) $|s_n| < 0,01 \iff \frac{2}{n} < 0,01 \iff 200 < n$

si $n \geq N = 201$, on a $|s_n| < 0,01$

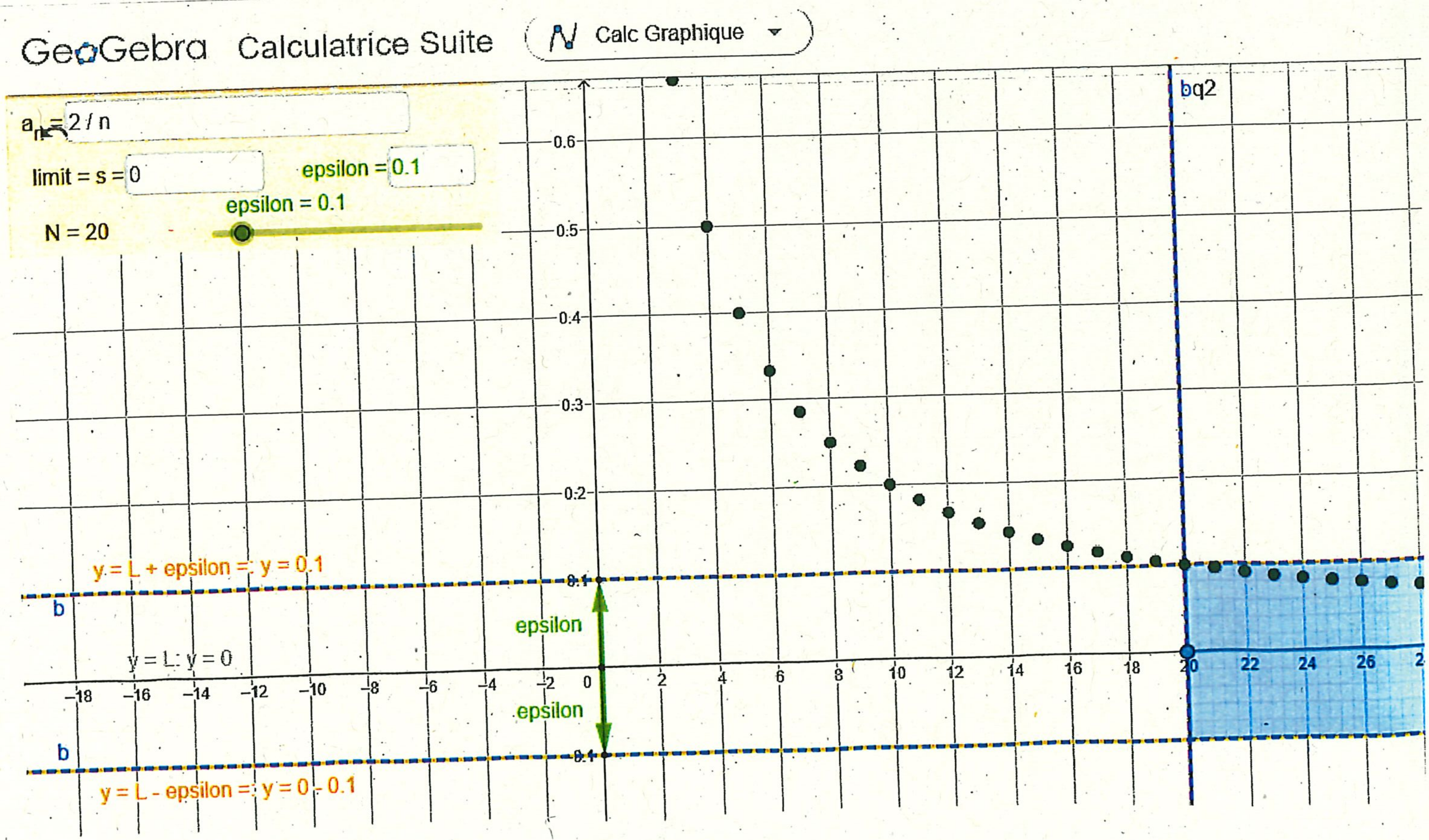
(c) Soit $\varepsilon > 0$ qcq

on veut $|s_n| < \varepsilon \iff \frac{2}{n} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < n$

on choisit $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ et on a : $n \geq N \Rightarrow |s_n| < \varepsilon$

donc $\{s_n\}$ converge vers 0 [car $|s_n| < \varepsilon \iff |s_n - 0| < \varepsilon$!]

(d)



ex 11

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $n \geq N$, on a : $|S_n - S| < \varepsilon$

$\forall$: quelque soit
$\exists$: il existe
tq : tel que

a) $\varepsilon = 0,1$: on veut $|S_n - 2| < 0,1$

Rep : $N = 48$: 2
$N = 68$: 7
$N = 47$: 1
$N = 67$: 2

$\iff \left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < 0,1$

$\iff \left| \frac{2n-1-2(n+3)}{n+3} \right| < 0,1$

$\iff \left| \frac{\cancel{2n}-1-\cancel{2n}-6}{n+3} \right| < 0,1$

$\iff \left| \frac{-7}{n+3} \right| < 0,1$

$\iff \frac{7}{n+3} < 0,1$ $\quad \times (n+3)$

"équivalent" $\iff 7 < 0,1(n+3)$

$\iff 7 < 0,1n + 0,3$

$\iff 6,7 < 0,1n$

$\iff 67 < n$

Prenons $N = 68$, ainsi :

$n \geq 68 \overset{?}{\Rightarrow} |S_n - S| < 0,1$ ✓

b) $\varepsilon = 0,001$: " $N = 6998$ ✓

c) ε qq " $|S_n - 2| < \varepsilon \iff \dots \iff \frac{7}{n+3} < \varepsilon \iff \frac{7}{\varepsilon} < n+3$

$\iff \boxed{\frac{7}{\varepsilon} - 3 < n}$

on doit déterminer N en fonction d'ε

$\frac{7}{\varepsilon} - 3$ n'est a priori pas entier ; on choisit l'entier qui suit pour N :

$N-1 \quad \frac{7}{\varepsilon}-3 \quad N$

l'entier précédent est :
$N - 1 = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 3\right]$: "partie entière de ..."

et donc $N = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 3\right] + 1$ fait l'affaire

ex 11 (suite)

ainsi on a : $n \geq N \Rightarrow |S_n - 2| < \varepsilon$

ce qui prouve que $\{S_n\}$ converge vers 2