ex 3 a) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Récurrence :

Cas $n=1$: $1^2 \overset{?}{=} \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}=\dfrac{6}{6}$ ✓

H.R : $1^2+2^2+\dots+m^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ pour un certain m

à dém : $1^2+2^2+\dots+m^2+(m+1)^2 \overset{?}{=} \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$

dém : $1^2+2^2+\dots+(m+1)^2$

$= 1^2+2^2+\dots+m^2+(m+1)^2$

$= \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2$ ↓ H.R.

$= (m+1)\left[\dfrac{m(2m+1)}{6}+(m+1)\right]$ ↓ mise en évidence

$= (m+1)\left[\dfrac{m(2m+1)+6(m+1)}{6}\right]$

$= \dfrac{(m+1)\left[2m^2+7m+6\right]}{6}$

$= \dfrac{(m+1)(2m+3)(m+2)}{6}$ ↓ factorisation 1.R.4*

cqfd

d) $3^{2n}+7=8k$ $(k\in\mathbb{N})$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Récurrence :

Cas $n=0$: $3^0+7\overset{?}{=}8k \Leftrightarrow 8\overset{?}{=}8k$: V pour $k=1$

H.R : $3^{2m}+7=8k$ $(k\in\mathbb{N})$ pour un certain $m\in\mathbb{N}$

à dém : $3^{2(m+1)}+7 \overset{?}{=} 8\cdot\ell$ $(\ell\in\mathbb{N})$

dém : $3^{2m+2}+7 = 3^{2m}\cdot 9+7$

$=(8k-7)\cdot 9+7$ ↓ H.R.

$=8\cdot k\cdot 9-56$

$=8\cdot(\underbrace{9k-7}_{\ell\in\mathbb{N}})$

cqfd

Ex 3 b) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Récurrence :

Cas $n=1$: $1^3 \overset{?}{=} \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ ✓

H.R. : $1^3+2^3+\dots+m^3 = \dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$

à dém : $1^3+\dots+(m+1)^3 \overset{?}{=} \dfrac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

dém : $1^3+\dots+m^3+(m+1)^3$ ↓ H.R.

$= \dfrac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3$ ↓ mise en évidence

$= (m+1)^2\left[\dfrac{m^2}{4}+(m+1)\right]$

$= (m+1)^2\left(\dfrac{m^2+4m+4}{4}\right)$ ↓ fact.

$= (m+1)^2\dfrac{(m+2)^2}{4}$ cqfd

c) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Récurrence

Cas $n=1$: $1\cdot 2 \overset{?}{=} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ ✓

H.R : $1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+m(m+1) = \dfrac{m(m+1)(m+2)}{3}$ pour un certain m

à dém : $1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(m+1)(m+2) \overset{?}{=} \dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$

dém : $1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+m(m+1)+(m+1)(m+2)$ ↓ H.R.

$= \dfrac{m(m+1)(m+2)}{3}+(m+1)(m+2)$ ↓ mise en év.

$= (m+1)(m+2)\left[\dfrac{m}{3}+1\right]$

$= (m+1)(m+2)\dfrac{(m+3)}{3}$

cqfd

Ex 3 b) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Récurrence :

Cas $n=1$: $1^3 \overset{?}{=} \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ✓

H.R. : $1^3+2^3+\dots+m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$

à dém : $1^3+\dots+(m+1)^3 \overset{?}{=} \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

dém : $1^3+\dots+m^3+(m+1)^3$ ↓ H.R.

$= \frac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3$ ↓ mise en évidence

$= (m+1)^2\left[\frac{m^2}{4}+(m+1)\right]$

$= (m+1)^2\left(\frac{m^2+4m+4}{4}\right)$ ↓ fact.

$= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$ cqfd

c) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Récurrence

Cas $n=1$: $1\cdot2 \overset{?}{=} \frac{1\cdot2\cdot3}{3}$ ✓

H.R : $1\cdot2+2\cdot3+\dots+m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$ pour un certain m

à dém : $1\cdot2+2\cdot3+\dots+(m+1)(m+2) \overset{?}{=} \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$

dém : $1\cdot2+2\cdot3+\dots+m(m+1)+(m+1)(m+2)$ ↓ H.R.

$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3}+(m+1)(m+2)$ ↓ mise en év.

$= (m+1)(m+2)\left[\frac{m}{3}+1\right]$

$= (m+1)(m+2)\frac{(m+3)}{3}$

cqfd