D9 : Théorème (dérivée de x puissance n)

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^n$ et $x\in\mathbb{R}$.

Alors on a:

a) Si $n\in\mathbb{N}$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$

b) Si $n\in\mathbb{Z}_-^*$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$

c) Si n est de la forme $n=\frac{1}{q}$ avec $q\in N^*$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$

d) Si $n\in\mathbb{Q}$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$

Démonstration : donner les arguments manquants.

a) Cas $n\in\mathbb{N}$ par récurrence :

1. H.R. : $(x^n)'=nx^{n-1}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$
2. à démontrer : $(x^{n+1})'=(n+1)x^n$ pour le même n

   dém : $(x^{n+1})'=(x^n\cdot x)'$ car [ARG 1:..]

   $=x^n\cdot x'+(x^n)'\cdot x$ car [ARG 2:..]

   $=x^n\cdot 1+x\cdot(x^n)'$ car [ARG 3:..]

   $=x^n\cdot 1+x\cdot nx^{n-1}$ car [ARG 4:..]

   $=x^n+n\,x\,x^{n-1}$

   $=x^n+n\,x^n$ car [ARG 5:..]

   $=x^n(1+n)$ car [ARG 6:..]

   $=(n+1)x^n$ car [ARG 7:..]

3. Cas où $n=0$ (pour x non nul) :

   $(x^0)'=(1)'$ car [ARG 8:..]

   $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-1}{h}$ car [ARG 9:..]

   $=\lim\limits_{h\to 0}0$ car [ARG 10:..]

   $=0$ car [ARG 11:..]

b) Cas $n\in\mathbb{Z}_-^*$:

On peut écrire $n=-m$, avec $m\in\mathbb{N}^*$

On a : $(x^{-m})=\left(\frac{1}{x^m}\right)$, car [ARG 12:..]

D'où:

$$\begin{aligned}
(x^{-m})' &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \\
&= -\left(\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}\right), \text{ car [ARG 13:...]} \\
&= -\left(\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}\right), \text{ car [ARG 14:...]} \\
&= -mx^{(m-1)-2m}, \text{ car [ARG 15:...]} \\
&= -mx^{-m-1}
\end{aligned}$$

c) Cas *n* est de la forme $n=\frac{1}{q}$ **avec** $q\in N^*$

Nous allons calculer $\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)'$ de deux façons différentes :

A] d'une part, on a : $\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)'=\left(x^{\frac{1}{q}\cdot q}\right)'$, car [ARG 16:...]

$=(x^1)'$,

$=1$, car [ARG 17:...]

B] d'autre part, on a : $\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)=f(g(x))$ où $f(x)=x^q$ et $g(x)=x^{\frac{1}{q}}$,

car [ARG 18:...]

et on sait déjà que : $f'(x)=q\,x^{q-1}$, car [ARG 19:...]

on a donc : $\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)'=(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$, car [ARG 20:...]

$=f'(x^{\frac{1}{q}})\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'$, car [ARG 21:...]

$=q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'$, car [ARG 22:...]

On égalise les deux valeurs précédentes en A] et et B] pour $\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)'$ et on obtient :

$$q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'=1$$

d'où : $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'=\dfrac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}}$, car [ARG 23:...]

$=\dfrac{1}{q(x^{\frac{q-1}{q}})}$, car [ARG 24:...]

$=\dfrac{1}{q(x^{1-\frac{1}{q}})}\quad=\dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{q}}}\quad=\dfrac{1}{q}\cdot x^{-(1-\frac{1}{q})}\quad=\dfrac{1}{q}\cdot x^{\frac{1}{q}-1}$

d) Cas *n* est de la forme $\frac{p}{q}$ **, avec** $p\in N$ et $q\in N^*$ **.**

$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$, car [ARG 25:………………………………………...…………………………...]

$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)'=\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)'=p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)'$, car [ARG 26:…………………………………………………..]

$=p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}\right)$, car [ARG 27 :……………………………………………..]

$=p\left(x^{\frac{p-1}{q}}\right)\cdot\left(\frac{1}{q}x^{\frac{1-q}{q}}\right)$

$=\frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1-q}{q}}\right)$ $=\frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-1+1-q}{q}}\right)$ $=\frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-q}{q}}\right)$ $=\frac{p}{q}\left(x^{\frac{p}{q}-1}\right)$

Remarque : cette formule est également vraie pour $n\in\mathbb{R}$, par exemple $n=\sqrt{2}$ ou $n=\pi$, mais on ne le démontre pas !