Plus sur les nombres …

Travail individuel pour aller plus loin (bonus)

- Lire le document ci-dessous et répondre aux questions lorsqu'elles surviennent sur un document manuscrit et individuel
- Tout ne peut (ne doit?) pas être fait pour obtenir un bonus, à vous de jouer, de choisir ce qui vous tente, d'essayer, ...

1. Soit la fonction f déterminée par $f(x) = \begin{cases} 1\text{, si x est un nombre rationnel} \\ 0\text{, sinon} \end{cases}$.

   a) Déterminer son domaine de définition, ses zéros et la représenter graphiquement.

   b) Que savez-vous des différents ensembles de nombres : les nommer ? en donner des éléments ? une définition ?

2. Les nombres **entiers naturels** $\mathbb{N}$ – quelques points forts

   a) Rappel : $\mathbb{N} = \{0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ; \ldots\}$

   b) ** Une lecture : «Ne compter que sur ses doigts » [à demander au professeur]

   c) Notation : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   d) ** Une référence : « Zéro, la biographie d'une idée dangereuse », Charles Seife, Ed. Lattes

   e) ** Une référence : «L'histoire universelle des chiffres », Georges Ifrah, Ed. Laffont

   f) Deux opérations « naturelles » : l'addition et la multiplication …

   g) ** Des propriétés de ces deux opérations :

      a. opérations internes

      b. éléments neutres 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication

      c. commutativité

      d. associativité

      e. distributivité

      De quoi s'agit-il ? Donner des exemples, des définitions.

   h) ** Un exemple de mathématiques dans $\mathbb{N}$: les critères de divisibilité par 2, 3 , 4, 5, 9, 10, 11, 25, 100 ;

      a. savez-vous qu'il existe des critères de divisibilité par 7, par 13 ? voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_crit%C3%A8res_de_divisibilit%C3%A.

         Donner des exemples;

      b. une branche des mathématiques s'occupe de ces questions: la théorie des nombres (cf théorème de Fermat, conjecture de Goldbach, théorie des codes, cryptographie …). Explorer ...

i) Calculer :

a. 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

b. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 20.

c. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 123456789.

d. Conjecturer une formule pour calculer rapidement 1 + 2 + 3 + … + n pour tout $n \in \mathbb{N}$

e. La démontrer.

3. Les nombres **entiers relatifs** $\mathbb{Z}$ – quelques points forts

a) Si on se place du point de vue de la résolution d'équations, on se rend compte que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas suffisant pour pouvoir résoudre toute équation; par exemple x + 3 = 2 …

Expliquer.

b) On construit donc « plus grand » ! $\mathbb{Z}$ = {… ;-3 ;-2 ;-1 ;0 ;1 ;2 ;3 ;4 ; …}

c) Compléter :

- $\mathbb{Z}^* =$
- $\mathbb{Z}_- =$
- $\mathbb{Z}_+^* =$

d) Notations et ensembles : $\in, \notin, \emptyset, \cap, \cup, \setminus, \subset$

e) Une nouveauté : tout entier relatif admet un **opposé** ;
une opération supplémentaire : la soustraction (« additionner l’opposé »)

Illustrer.

f) On considère la fonction $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie ainsi :

$$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=-1,\ f(4)=2,\ f(5)=-2,\ \dots$$

Trouver une expression générale pour f(n).

4. Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ – quelques points forts

a) Si on se place du point de vue de la résolution d'équations, on se rend compte que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas suffisant pour pouvoir résoudre toute équation; par exemple 6x = 15 …

Expliquer.

b) Les fractions : $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right\}$. Donner des exemples.

c) Une opération supplémentaire : la division avec reste
Effectuer la division avec reste de 37 par 8

d) Ecriture décimale d'un nombre... Donner des exemples.

e) Définition de « nombre rationnel » : un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction.

f) Théorème « écriture décimale / fractions » :

- à toute fraction correspond une unique écriture décimale finie ou infinie périodique
- à toute écriture décimale finie ou infinie périodique correspond une unique fraction irréductible

g) Une nouveauté : toute fraction (sauf 0 ou plutôt $\frac{0}{n}$ pour tout $n \notin \mathbb{Z}^*$ admet un **inverse.** « Diviser, c'est multiplier par l'inverse »!

Illustrer.

h) Exercices

i. déterminer la fraction irréductible correspondant au nombre rationnel 2,34

ii. déterminer la fraction irréductible correspondant au nombre rationnel $1{,}23\overline{4}$

iii. déterminer le nombre rationnel correspondant à la fraction $\frac{19}{3}$

iv. ** déterminer le nombre rationnel correspondant à la fraction $\frac{17}{19}$

5. Et après … - quelques points forts

a) Une histoire : la secte des pythagoriciens …
voir http://www.canal-educatif.fr/Video/Sciences/007Pythagore/player.html

b) Théorème:
Dans un carré de côté 1, la diagonale n'est pas commensurable avec le côté.

i. Ecrire ce théorème de façon la plus concise possible en utilisant des notations mathématiques de votre connaissance.

ii. Savez-vous démontrer ce théorème?

iii. Quel rapport avec « l'irrationnalité de racine de deux » ?

c) Certains nombres ne sont donc pas dans $\mathbb{Q}$! Donner d'autres exemples.

d) Vocabulaire : on les appelle **nombres irrationnels**

g) Remarque : on perd certaines propriétés si on travaille seulement avec les irrationnels ; par exemple, la somme ou le produit de deux irrationnels n'est pas forcément un irrationnel
Donner un exemple :

e) ** Question : connaît-on d'autres irrationnels ?
** Une réponse : Lambert 1761 montre l'irrationalité de Pi
** [pour les fanas : http://membres.lycos.fr/bgourevitch/liens.html des dizaines de ressources autour de Pi]

** Question : combien y a-t-il d'irrationnels ?

6. et les réels ? … - quelques points forts

a) A nouveau, si on se place du point de vue de la résolution d'équations, on se rend compte que l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas suffisant pour pouvoir résoudre toute équation; par exemple $x^2=2$!

b) ** Question : comment définir les nombres réels ?
Une réponse : tous les nombres situés sur la « droite réelle »...

c) Notation pour l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$

d) ** Des questions difficiles ...

   a. y a-t-il « plus » de rationnels que d'entiers ?
   y a-t-il « plus » d'irrationnels que de rationnels ?
   qu'est-ce que l'infini ?
   y a t-il plusieurs infinis ?
   y a-t-il des infinis plus grands que d'autres ?

   b. ** les rationnels sont-ils proches les uns des autres ?
   Réponse 1: entre deux rationnels il y a toujours un rationnel
   Réponse 2: entre deux rationnels il y a une infinité de rationnels

   c. ** quel mélange y a-t-il entre rationnels et irrationnels ?