Continuité

23

a. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

Ainsi $f(x)$ est continue partout sauf en $x=2$ et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}$ donc $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$

Ainsi $f(x)$ est continue partout sauf en $x=2$ et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{-x+2}{x-2}=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

24 Soit $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $a=1$.

Soient $g(x)=1$ et $h(x)=x$. Par le théorème [fonctions continues] g et h sont continues car elles sont polynomiales. Par le théorème [opérations avec les fonctions continues] f est continue en $a=1$ *car* $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ *et* $h(1)=1\neq 0$

Soit $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $a=0$

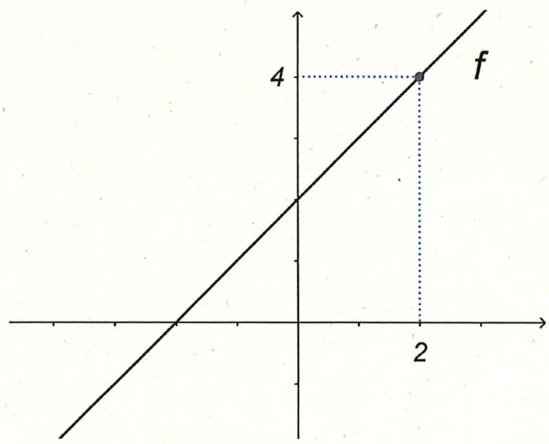
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}$ donc $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. D'où f est non continue en $a=0$

25 Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{, si } x\neq 2 \\ 4 & \text{, si } x=2\end{cases}$ et $a=2$

Notons que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} & \text{, si } x\neq 2 \\ 4 & \text{, si } x=2\end{cases}=\begin{cases}x+2 & \text{, si } x\neq 2 \\ 4 & \text{, si } x=2\end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ et f est continue en $a=2$

La représentation graphique de f :



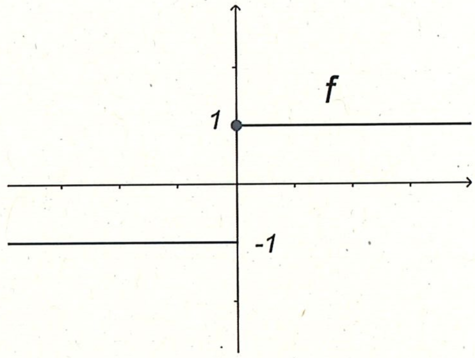
26 Soit $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ et $a=0$

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\end{array}\right\}\quad \text{donc } \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

D'où f est non continue en $a=0$

La représentation graphique de f :

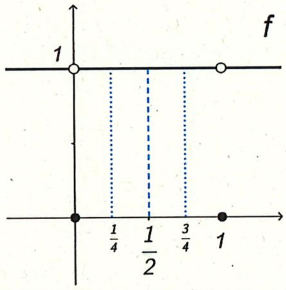


27 Soit f - une fonction définie par $f(x)=\begin{cases}2x+k, & \text{si } x<2\\ x^2-2, & \text{si } x\geq 2\end{cases}$.

Pour avoir la continuité de f en $x=2$, il faut que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

C'est-à-dire $2x+k=x^2-2$ pour $x=2$. D'où $k=x^2-2x-2\big|_{x=2}=2^2-2\cdot 2-2=-2$.

28 Soit f - une fonction définie par $f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in\mathbb{Z}\\ 1, & \text{si } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$



a. $D_f=\mathbb{R}$

b. La fonction f est continue $\forall a\notin\mathbb{Z}$, par exemple pour $a=\frac{1}{2}$.

Considérons l'intervalle $I=(\frac{1}{4};\frac{3}{4})$ - le voisinage du point $\frac{1}{2}$.

Alors, $f(x)=1\ \forall x\in I$ .D'où f est continue en $a=\frac{1}{2}$ car elle est constante sur un intervalle comprenant a

c. La fonction f est non continue $\forall b\in\mathbb{Z}$, par exemple pour $b=3$, car :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1\\ f(3)=0\end{array}\right\}\quad \text{donc } \lim_{x\to 3} f(x)\neq f(3).$$ D'où f est non continue en $b=3$.

29 Soit f une fonction réelle définie par $f(x)=\begin{cases}1, \text{si } & x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{si } & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $D_f=\mathbb{R}$.

Cette fonction est discontinue en chaque point de son domaine de définition, car chaque voisinage d'un point $a\big|_{a\in\mathbb{Q},\, f(a)=1}$ contient des points $b\big|_{b\notin\mathbb{Q},\, f(b)=0}$ et vice versa. C'est-à-dire

$\forall\delta>0\ \exists a\in\mathbb{Q}$ et $b\notin\mathbb{Q}$ tel que $|a-b|<\delta$ mais $|f(a)-f(b)|=1$.