Calculs de $\lim_{x\to a} f(x)$ avec la définition de la limite

1) $\lim_{x\to -4} \left(\frac{1}{2}x\right) = -2$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tq $|x-(-4)| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x - (-2)\right| < \varepsilon$

c.à.d $\left|\frac{1}{2}x + 2\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}(x+4)\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x+4| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x+4| < 2\varepsilon$

on pose $\delta = 2\varepsilon$ et ainsi on a :

si $|x+4| < \delta = 2\varepsilon$, alors $\frac{1}{2}|x+4| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x + 2\right| < \varepsilon$ cqfd

2) $\lim_{x\to 2} (3x-1) = 5$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tq $|x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-1) - 5| < \varepsilon$

c.à.d $|3x-6| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon/3$

on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ et ainsi on a :

si $|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$, alors $3|x-2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |3x-6| < \varepsilon$ cqfd

Facultatif : calculs de limites infinies et à l'infini avec la définition

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Déf : $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tq $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

ici : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $M > 0$ tq $x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$

càd $\frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x$ $(\varepsilon, x > 0)$

On pose $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, et on a :

$x > M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ cqfd

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Déf : $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tq $|x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

ici : Soit $M > 0$. On cherche δ tq $|x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$

càd $\frac{1}{M} > x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{M}} > x$ $(x, M > 0)$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ et on a :

$|x - 0| < \delta = \sqrt{\frac{1}{M}} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$

$\Leftrightarrow |x|^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M$

5) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Soit $M > 0$. On cherche δ tq $|x-1| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M$

On a : $|x-1| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x-1 < \delta$

$\Leftrightarrow -\delta + 1 < x < \delta + 1$

on veut : $\frac{1}{(x-1)^2} > M \Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow x-1 < \sqrt{\frac{1}{M}}$

$\Leftrightarrow x < 1 + \sqrt{\frac{1}{M}}$

on pose $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ et on a :

$|x-1| < \delta \Rightarrow x < \delta + 1 = \sqrt{\frac{1}{M}} + 1$ cqfd

Un cas plus complexe...

$\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) \overset{?}{=} 0$

Déf : à voir $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

soit $\varepsilon > 0$ qcq :

on veut $|x \sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon \Leftrightarrow |x||\sin(1/x)| < \varepsilon$

or on sait que $|\sin(\frac{1}{x})| < 1$ (propriété de sin)

d'où $|x||\sin(1/x)| \leq |x|$

choisissons $\delta = \varepsilon$; on a alors :

$|x||\sin(1/x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

càd $|x| \sin(\frac{1}{x}) < \varepsilon$

cqfd