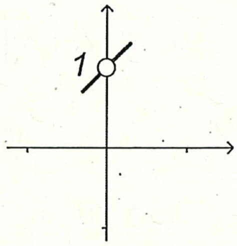
d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}$: c'est un type $\dfrac{0}{0}$ avec $\sqrt{\ }$

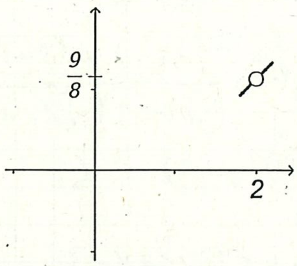
$$=\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-(x^2-x+1)}{x\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+2x}{x\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x+2)}{x\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\frac{0+2}{\sqrt{0+1}+\sqrt{0-0+1}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{2}{1+1}=1$$



e. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$: c'est un type $\dfrac{1}{0}$ avec $\sqrt{\ }$



$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\cdot\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(x+2)}{(\sqrt{4x+1}-3)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(\sqrt{4x+1}-3)(x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(\sqrt{4x+1}-3)(x+\sqrt{x+2})}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{((4x+1)-9)(x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}=\frac{(2+1)(\sqrt{4\cdot 2+1}+3)}{4(2+\sqrt{2+2})}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 4}=\frac{9}{8}$$

15

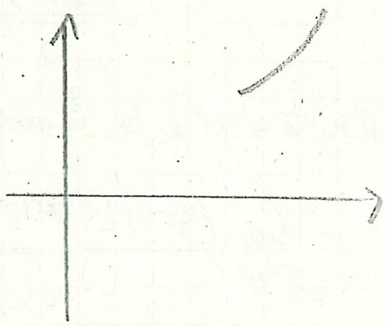
a.Soit $f(x)=3x-\sqrt{x^2-x+1}$

$D_{f(x)}$: pb. Si $x^2-x+1<0$; $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$, donc pas de zéros, $a=1>0$, d'où $D_{f(x)}=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ indétermination du type $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(3-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=(+\infty)\cdot(3-\sqrt{1-0+0})=+\infty\cdot 2=+\infty$$

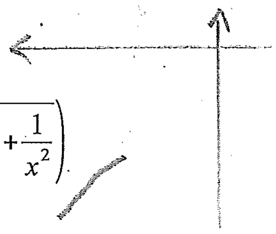


(Attention ! $\sqrt{x^2}=|x|$ et non $\sqrt{x^2}=x$)

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x-(-x)\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

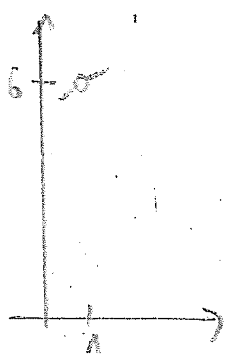
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(3+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=(-\infty)\cdot(3+\sqrt{1+0+0})=-\infty\cdot4=-\infty$$



c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x}-1}$ type "$\frac{0}{0}$"

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left[x^2(x-1)+(x-1)\right](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

$$=(1^2+1)(1+2)=6$$



d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+x^3+x-3}{\sqrt{x}-1}$ type "$\frac{0}{0}$"

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^4+x^3+x-3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^4+x^3+x-3)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

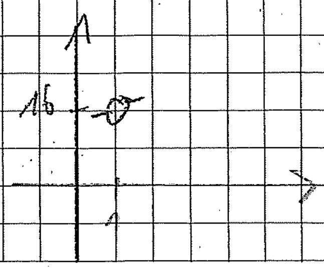
on divise (x^4+x^3+x-3) par $(x-1)$:

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x-3 & x-1 \\ -(x^4-x^3) & x^3+2x^2+2x+3 \\ \quad 2x^3+x-3 & \\ -(2x^3-2x^2) & \\ \quad 2x^2+x-3 & \\ -(2x^2-2x) & \\ \quad 3x-3 & \\ -(3x-3) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

donc $x^4+x^3+x-3=(x-1)(x^3+2x^2+2x+3)$

on revient à la limite : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^4+x^3+x-3)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^3+2x^2+2x+3)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=8\cdot2=16$$



ex15 (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x+4}+2x = $ "$\infty-\infty$ .."

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2(1-2/x-4/x^2)}+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+2x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)\sqrt{1-2/x-4/x^2}+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}+2\right) = (-\infty)\cdot 1 = -\infty$

ex15 (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x+4}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1-2/x+4/x^2}+x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{\ldots}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}+1\right) = $ "$(+\infty)\cdot 0$" reste indéterminé

→ autre approche :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x+4}+x)(\sqrt{x^2-2x+4}-x)}{(\sqrt{x^2-2x+4}-x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+4-x^2}{\sqrt{\ldots}-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(-2+4/x)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(-2+4/x)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)} = \frac{-2}{-2} = 1$

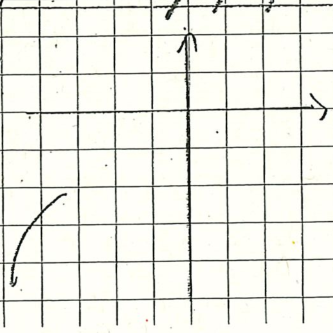
ex15 (g) idem à (f), mais là la 1re approche fonctionne !

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+4}+x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+x$

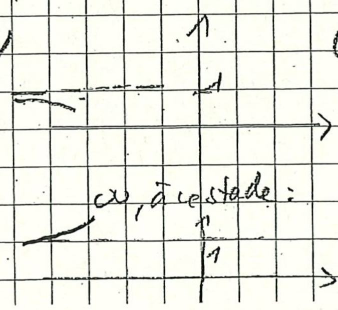
$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right) = +\infty(1+1) = +\infty$

Interprétations graphiques :

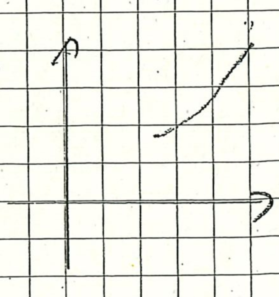
(e)



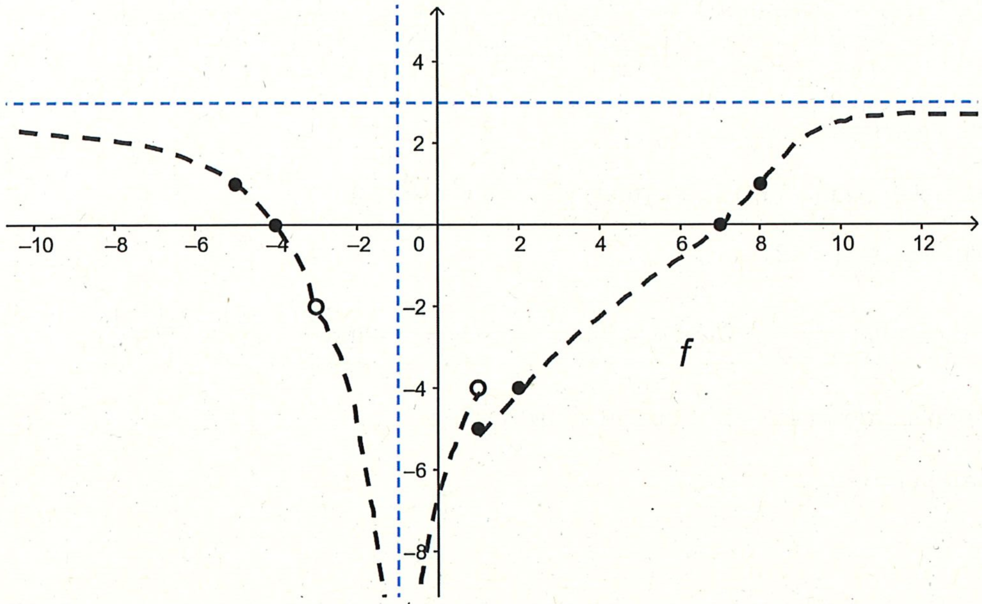
(f)



(g)



16



17

a. $\nexists \lim\limits_{x\to -4} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

c. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$

d. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

e. $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=5$

g. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

h. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

18 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-2x^2}$.

a. Pour $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{0-1}{(0^-)^2(0^--2)}=\dfrac{-1}{0^+\cdot(-2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0-1}{(0^+)^2(0^+-2)}=\dfrac{-1}{0^+\cdot(-2)}=+\infty\end{array}\right\}\ \text{donc } \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-1}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-1}{(2^-)^2(2^--2)}=\dfrac{1}{4\cdot 0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-1}{(2^+)^2(2^+-2)}=\dfrac{1}{4\cdot 0^+}=+\infty\end{array}\right\}\ \text{donc } \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1-\frac{1}{x})}{x^3(1-\frac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x^2(1-\frac{2}{x})}=\dfrac{1-0}{(+\infty)^2\cdot(1-0)}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

c. Par exemple : $g(x)=3x^2$

d. Oui. Par exemple : $g(x)=3x^2+3x+1$ (tout $g(x)=3x^2+bx+c$)

e. Par exemple: $h(x)=2(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}(f(x)h(x))=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^3-2x^2}\cdot 2(x-2)=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x-1)}{x^2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-1)}{x^2}=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2}$$

Oui. Par exemple : $h(x)=4(x-2)$ (tout $h(x)=a(x-2)$)

f. Par exemple $k(x)=x^3$

19

a. Faux

Contre exemple : soient $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$ et $a=0$

on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=-\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{1}{x^2}=1$

b. Vrai.

Posons $x=2+h$, c'est-à-dire $h=x-2$

on obtient : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{(2+h)\to 2} f(2+h)=\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)$

c. Vrai.

On sait que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ et $g(x)>0$, c'est-à-dire qu'il existe un tel voisinage du nombre a tel que

$0<g(x)<1$ $\forall x$ dans cet intervalle. D'où $\dfrac{f(x)}{g(x)}>f(x)$ sur cet intervalle.

En même temps, on sait que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, alors on peut en déduire que

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}>\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, par conséquent $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

20

a. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$: c'est un type $\dfrac{0}{0}$ avec $\sqrt{\ }$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2x-1)-9}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot 5-1}+3}{2}=\frac{3+3}{2}=3$$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{0^2+3}-\sqrt{0^2+1}}{0^2-1}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{-1}=1-\sqrt{3}$

c. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-9x}{(4-x^2)^3}$: c'est un type $\dfrac{1}{0}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}f(x)&=\lim_{x\to 2^-}\frac{-9x}{[(2-x)(2+x)]^3}=\frac{-18}{[0^+\cdot 4]^3}=\frac{-18}{[0^+]^3}=\frac{-18}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to 2^+}f(x)&=\lim_{x\to 2^+}\frac{-9x}{[(2-x)(2+x)]^3}=\frac{-18}{[0^-\cdot 4]^3}=\frac{-18}{[0^-]^3}=\frac{-18}{0^-}=+\infty\end{aligned}\right\}\text{ donc } \nexists \lim_{x\to 2}f(x)$$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$: c'est un type $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)^2}$$: c'est un type $\dfrac{1}{0}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}f(x)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1-2}{0^-\cdot 2^2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim_{x\to 1^+}f(x)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1-2}{0^+\cdot 2^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{aligned}\right\}\text{ donc } \nexists \lim_{x\to 1}f(x)$$

e. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x-a}$: c'est un type $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{1}=1$$

f. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$: c'est un type $\dfrac{0}{0}$ avec $\sqrt{\ }$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$ (pour $a>0$)

g. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$: c'est un type $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a$$

h. $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$: c'est un type $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=a^2+a\cdot a+a^2=3a^2$$

i. $\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$: c'est un type $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax}\cdot\frac{1}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{ax}\cdot\frac{1}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{ax}=-\frac{1}{a\cdot a}=-\frac{1}{a^2}$$ (pour $a\neq 0$)

j. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$: c'est un type $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{x-2}\quad \text{type } \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{x-2}=\frac{2-1}{2^+-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

k. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$: c'est un type $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{2x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{2x}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

l. $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x}$: c'est un type $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1-0+0}{1+0}=1$$

m. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$: c'est un type $\frac{0}{0}$ avec $\sqrt{\ }$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x)-2}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}$$

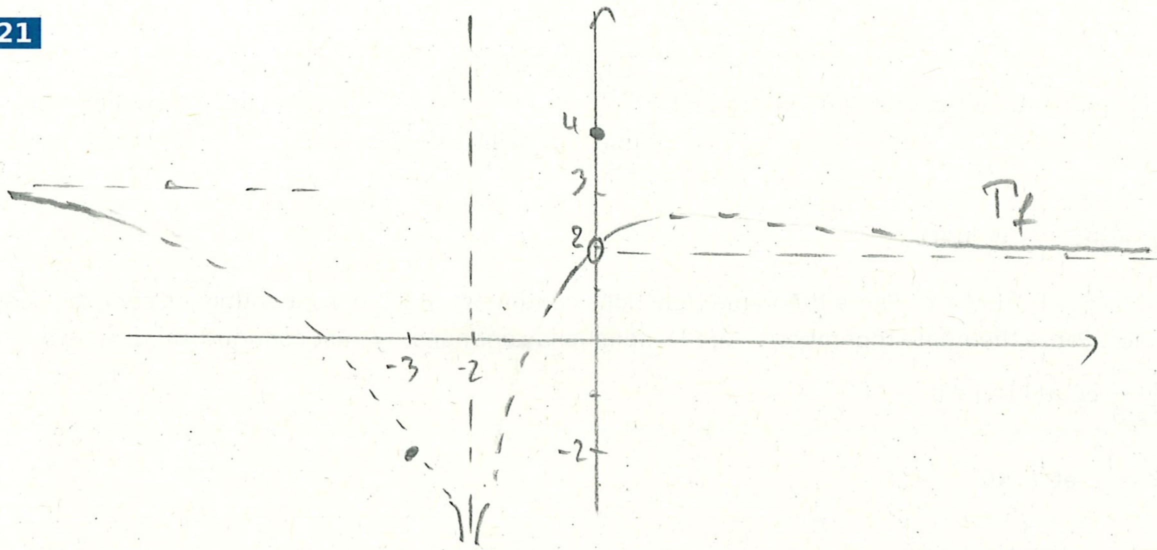
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1+2}{\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

n. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}=\dfrac{3^2+2\cdot 3-15}{3^2+8\cdot 3+15}=\dfrac{9+6-15}{9+24+15}=\dfrac{0}{48}=0$

o. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+1}{(x+3)^2}$: c'est un type $\dfrac{1}{0}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -3^-} f(x)&=\lim_{x\to -3^-}\frac{x+1}{(x+3)^2}=\frac{-3+1}{(0^-)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to -3^+} f(x)&=\lim_{x\to -3^+}\frac{x+1}{(x+3)^2}=\frac{-3+1}{(0^+)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{aligned}\right\}\quad \text{donc } \lim_{x\to -3} f(x)=-\infty$$

21



22