Théorème (dérivée de x puissance n)

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^n$ et $x\in\mathbb{R}$.
Alors on a:
a) Si $n\in\mathbb{N}$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$
b) Si $n\in\mathbb{Z}_-^*$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$
c) Si n est de la forme $n=\frac{1}{m}$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$
d) Si $n\in\mathbb{Q}$, alors $(x^n)'=nx^{n-1}$

Démonstration

1. Cas où $n\in\mathbb{N}^*$

   On a une formule générale, dite du binôme de Newton, qui dit :

   $$(a+b)^n=a^n+n\,a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+n\,a\,b^{n-1}+b^n$$

   d'où

   $$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

   $$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+n\,x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}x^2h^{n-2}+n\,x\,h^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

   car [ARG 1]

   $$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}x^2h^{n-2}+n\,x\,h^{n-1}+h^n}{h}$$

   car [ARG 2]

   $$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(n\,x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}x^2h^{n-3}+n\,x\,h^{n-2}+h^{n-1}\right)}{h}$$

   car [ARG 3]

   $$=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}x^2h^{n-3}+n\,x\,h^{n-2}+h^{n-1}\right)$$

   car [ARG 4]

   $$=n\,x^{n-1}$$

   car [ARG 5]

   Donner les arguments manquants.

2. Cas où $n \in \mathbb{Z}_-^*$

   On peut écrire $n = -m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, car [ARG 1]

   On a : $(x^{-m}) = \left(\frac{1}{x^m}\right)$, car [ARG 2]

   D'où:
   $$\begin{aligned}\left(x^{-m}\right)' &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \text{, car [ARG 3]}\\ &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \text{, car [ARG 3]}\\ &= -\frac{\left[x^m\right]'}{\left[x^m\right]^2} \text{, car [ARG 4]}\\ &= -\frac{mx^{m-1}}{\left[x^m\right]^2} \text{, car [ARG 5]}\\ &= -mx^{m-1-2m} \text{, car [ARG 6]}\\ &= -mx^{-m-1}\end{aligned}$$

   Donner les arguments manquants.

3. On considère maintenant la démonstration du cas où *n* est de la forme $\frac{1}{q}$, avec $q \in N^*$.

   Nous allons calculer $\left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]'$ de deux façons différentes :

   A] d'une part, on a : $\left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]' = \left[x^{\frac{1}{q}*q}\right]'$ = […....] ' = 1

   B] d'autre part, on a : $\left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]' = \left[f(g(x))\right]'$, où *f(x)* = […..........] et *g(x)* = […............]

   comme, grâce au calcul fait à l'exercice précédent, on sait que
   $\left(x^q\right)'$ = [..........................] , on a:

   $\left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right]'$ = [*f(g(x))*]' = *f* '([..........................])*g*'([..........................]) =

$$= q\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1} * \left(x^{\frac{1}{q}}\right)'$$

En égalant les deux résultats précédents, on obtient :

$$1 = q * \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1} * \left(x^{\frac{1}{q}}\right)' \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{[..........]} = \frac{1}{q * x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q * x^{1-\frac{1}{q}}} = \frac{1}{q} * x^{\frac{1}{q}-1}$$

Mettre ce qui convient à la place de chaque [….........]

4. Enfin, on considère maintenant la démonstration du cas où *n* est de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in N$ et $q \in N^*$.

$\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$, car [ARG 1]

$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)'$, car [ARG 2]

$= p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}\right)$, car [ARG 3]

$= p\left(x^{\frac{p-1}{q}}\right) \cdot \left(\frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}}\right)$, car [ARG 4]

$= \frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1-q}{q}}\right)$, car [ARG 5]

$= \frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-1+1-q}{q}}\right)$, car [ARG 6]

$= \frac{p}{q}\left(x^{\frac{p-q}{q}}\right)$, car [ARG 7]

$= \frac{p}{q}\left(x^{\frac{p}{q}-1}\right)$, car [ARG 8]

Remarque : cette formule est également vraie pour $n \in \mathbb{R}$, par exemple $n = \sqrt{2}$ ou $n = \pi$!