Taux de variation, nombre dérivé

1

a. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{2-1}=\frac{3}{1}=3$

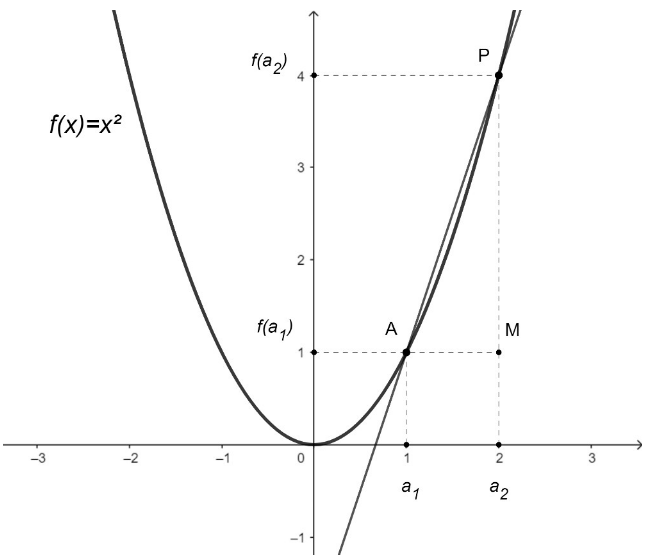
b. $\frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1}=\frac{1,5^2-1^2}{0,5}=\frac{2,25-1}{0,25}=\frac{1,25}{0,5}=2,5$

c. $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{2^2-(-2)^2}{2+2}=\frac{4-4}{4}=\frac{0}{4}=0$

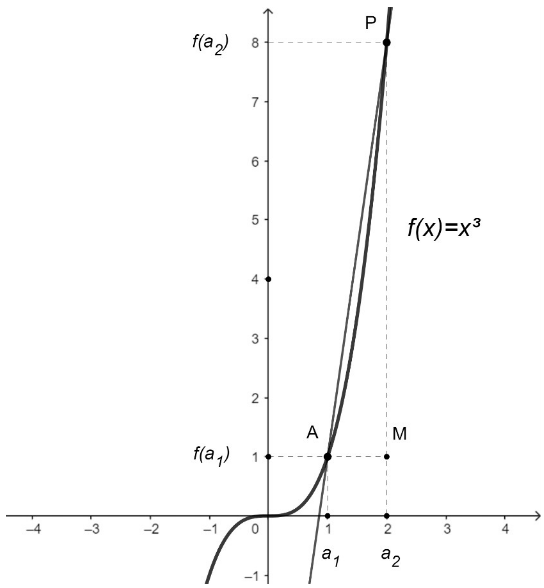
d. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^3-1^3}{2-1}=\frac{8-1}{1}=\frac{7}{1}=7$

Interprétations graphiques

a.



d.



2

a. $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1^2}{x-1}=(type\frac{0}{0})=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=1+1=2$

$f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=(type\frac{0}{0})=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=3+3=6$

b.

$f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=(type\frac{0}{0})=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=2^2+2\cdot2+4=12$

c. $f'(-2)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x-(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}1=1$

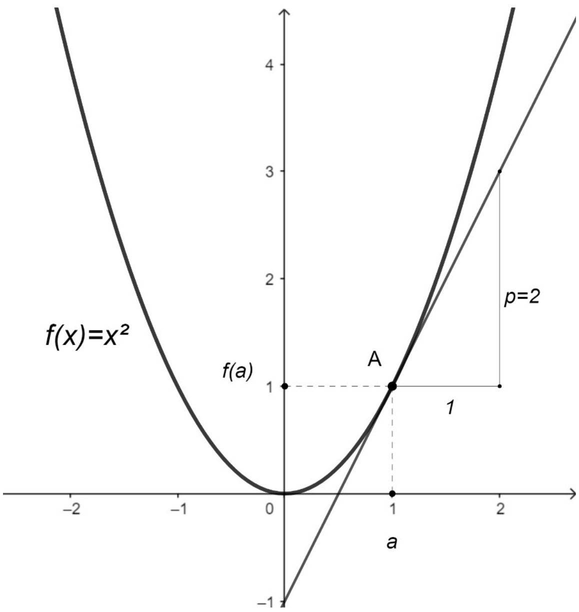
$f'(5)=\lim\limits_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}1=1$

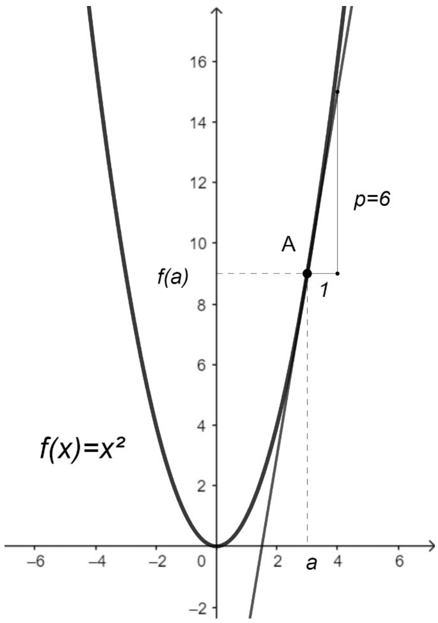
d. $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{3-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{0}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}0=0$

$f'(7)=\lim\limits_{x\to7}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}=\lim\limits_{x\to7}\frac{3-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to7}\frac{0}{x-7}=\lim\limits_{x\to7}0=0$

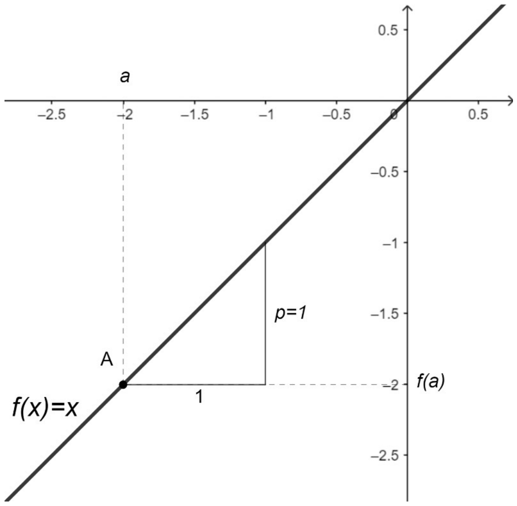
Interprétations graphiques

a. et

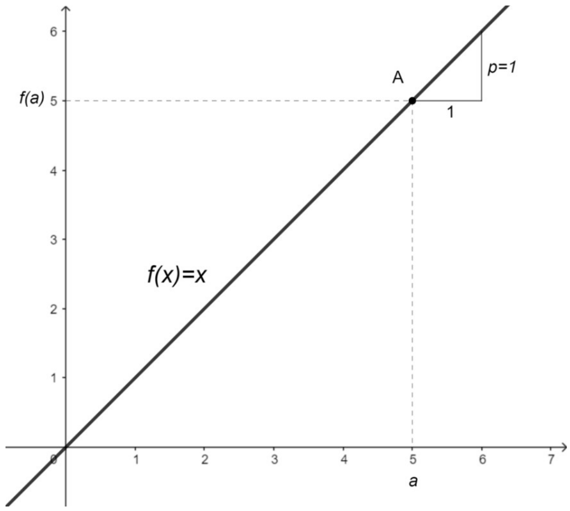




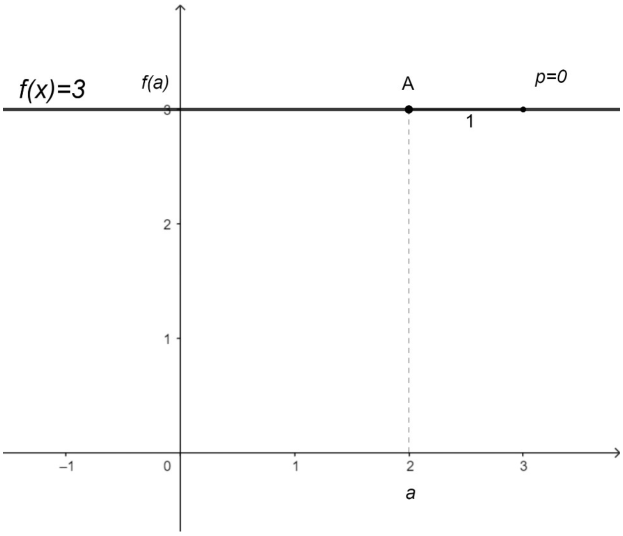
c.



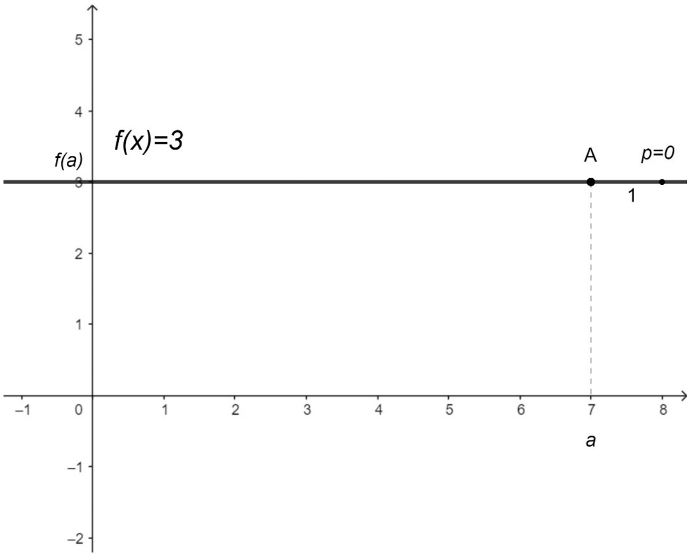
et



d.



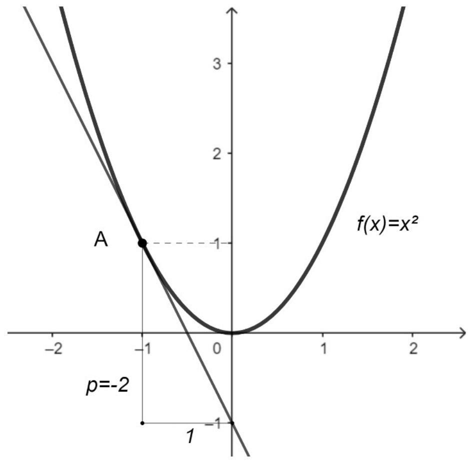
et



3

La pente de la tangente à la parabole d'équation $y=x^2$ au point (-1;1) :

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-(-1)^2}{x-(-1)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2 \end{aligned}$$

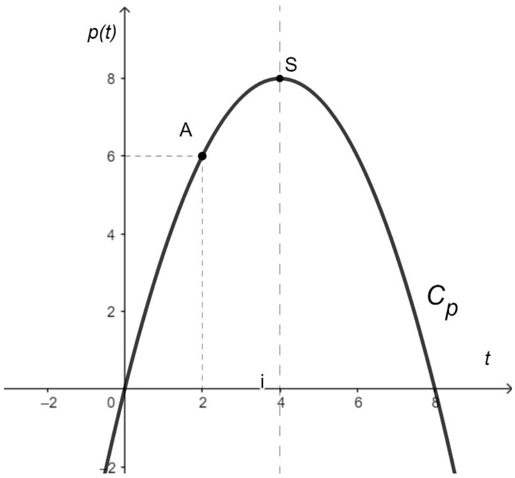


4

$p(t)=4t-\frac{t^2}{2}=4t(1-\frac{t}{8})$

$Z_p=\{0;8\}$

Sommet $S=(4;p(4))=(4;8)$



a. Vitesse moyenne : $v=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{p(t_2)-p(t_1)}{t_2-t_1}$ donc:

i $v=\frac{p(3)-p(2)}{3-2}=\frac{7{,}5-6}{1}=1{,}5$

ii $v=\frac{p(t)-p(2)}{t-2}=\frac{[-\frac{t^2}{2}+4t]-6}{t-2}=\frac{-\frac{t^2}{2}+4t-6}{t-2}=\frac{-\frac{1}{2}[t^2-8t+12]}{t-2}=\frac{-\frac{1}{2}(t-6)(t-2)}{t-2}\overset{t\neq 2}{=}-\frac{1}{2}(t-6)$

iii

$$v=\frac{p(2+h)-p(2)}{(2+h)-2}=\frac{[4(2+h)-\frac{(2+h)^2}{2}]-6}{h}$$

$$=\frac{[8+4h-\frac{[4+4h+h^2]}{2}]-6}{h}=\frac{8+4h-2-2h-\frac{h^2}{2}-6}{h}=\frac{2h-\frac{h^2}{2}}{h}=\frac{h(2-\frac{h}{2})}{h}\overset{h\neq 0}{=}2-\frac{h}{2}$$

iv

$$v=\frac{p(t)-p(a)}{t-a}=\frac{[4t-\frac{t^2}{2}]-[4a-\frac{a^2}{2}]}{t-a}$$

$$=\frac{4(t-a)-\frac{1}{2}(t^2-a^2)}{t-a}=\frac{4(t-a)-\frac{1}{2}(t-a)(t+a)}{t-a}=\frac{(t-a)(4-\frac{1}{2}(t+a))}{t-a}\overset{t\neq a}{=}4-\frac{t+a}{2}$$

v

$$v=\frac{p(t+h)-p(t)}{(t+h)-t}=\frac{[4(t+h)-\frac{(t+h)^2}{2}]-[4t-\frac{t^2}{2}]}{t+h-h}=\frac{[4t+4h-\frac{[t^2+2th+h^2]}{2}]-[4t-\frac{t^2}{2}]}{h}$$

$$=\frac{4t+4h-\frac{t^2}{2}-th-\frac{h^2}{2}-4t+\frac{t^2}{2}}{h}=\frac{4h-th-\frac{h^2}{2}}{h}=\frac{h(4-t-\frac{h}{2})}{h}\overset{h\neq 0}{=}4-t-\frac{h}{2}$$

b. Vitesse instantanée : $v_{inst}=\frac{dp(t)}{dt}$ où d signifie « accroissement infinitisémal »

i v_{inst} en $t=2$:

en partant de **a) ii** : $p'(2)=\lim_{t\to 2}\frac{p(t)-p(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}-\frac{1}{2}(t-6)=-\frac{1}{2}(2-6)=2$

en partant de **a) iii** : $p'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{p(2+h)-p(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(2-\frac{h}{2})=2-\frac{0}{2}=2$

ii v_{inst} en t

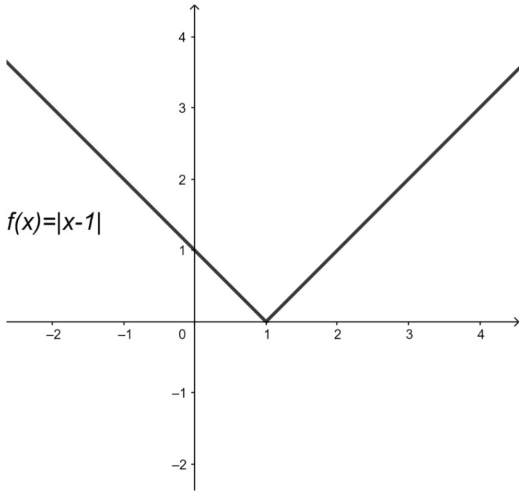
en partant de **a) iv** : $p'(a)=\lim_{x\to a}\frac{p(t)-p(a)}{t-a}=\lim_{t\to a}[4-\frac{t+a}{2}]=4-\frac{a+a}{2}=4-a$
d'où $p'(a)=4-a$ qu'on renomme en $p'(t)=4-t$

en partant de **a) v** : $p'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{p(t+h)-p(h)}{h}=\lim_{h\to 0}[4-t-\frac{h}{2}]=4-t$

5

a.

Soit $f(x)=|x-1|$



$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|-|1-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$

on doit connaître $|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{si } x\geq 1\\ -(x-1), & \text{si } x<1\end{cases}$

et donc étudier $x\to 1^-$ et $x\to 1^+$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}x-\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1\end{array}\right\}\qquad \text{donc } \nexists \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1} \text{ car } \nexists f'(1)$$

Interprétation géométrique : la sécante passant par $(1;0)$ et un autre point proche de la courbe de f a une pente qui tend vers $\begin{cases}-1, & \text{si } x\to 1^-\\ 1, & \text{si } x\to 1^+\end{cases}$

Par contre :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{|x-1|-|0-1|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x-1|-1}{x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(x-1)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$$

$(*)$ car $|x-1|=-(x-1)$ quand $x\to 0$

et la pente de la tangente à f en $(0;1)$ (c'est-à-dire en x=0) vaut -1

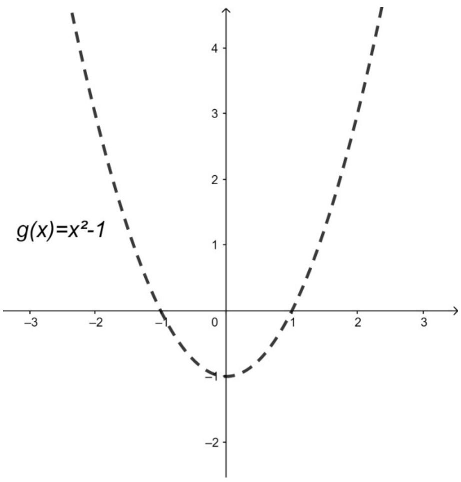
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-1|-|2-1|}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-1|-1}{x}\overset{(**)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(1)=1$$

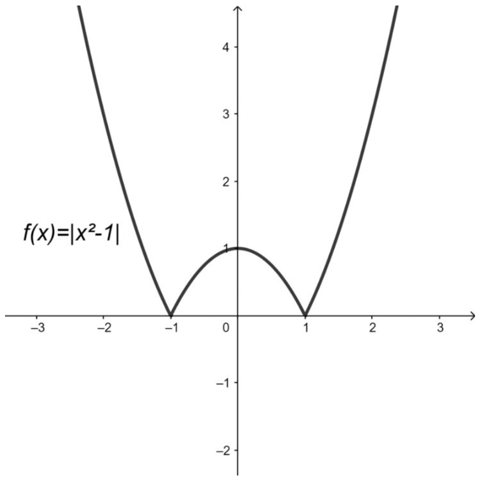
$(**)$ car $|x-1|=(x-1)$ quand $x\to 2$

et la pente de la tangente à f en $(2;1)$ (c'est-à-dire en x=2) vaut 1

b*

Soit $f(x)=|x^2-1|$, définissons $g(x)=x^2-1$, alors ;



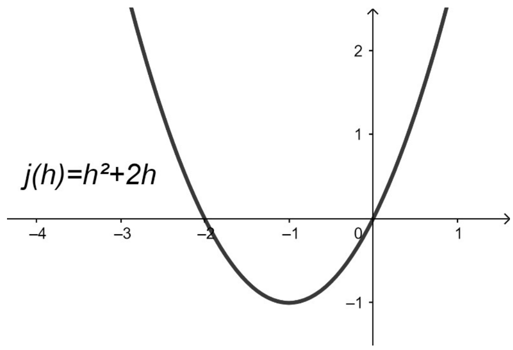


$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{|(x+h)^2-1|-|x^2-1|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x^2+2xh+h^2-1|-|x^2-1|}{h}$$

pour simplifier, étudions le cas $x=1$:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{|1^2+2h+h^2-1|-|1^2-1|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+2h|}{h}$$

pour contrôler $|h^2+2h|$ il faut connaître son signe :



$j(h)=h^2+2h=h(h+2)$ est $\begin{matrix}\geq 0 & \text{si} & h\in\mathbb{R}\setminus]-2;0[\\ <0 & \text{si} & h\in]-2;0[\end{matrix}$

donc $|h^2+2h|=\begin{cases} h^2+2h, & \text{si } h\notin]-2;0[\\ -(h^2+2h), & \text{si } h\in]-2;0[\end{cases}$

et on doit considérer les cas $h\to 0^-$ et $h\to 0^+$

$$\left.\begin{matrix}\lim_{h\to 0^-}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(h^2+2h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h(h+2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}-(h+2)=-2\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h+2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h+2)=2\end{matrix}\right\}\text{donc } \nexists \lim_{h\to 0}\frac{|h^2+2h|}{h}=f'(1)$$

Interprétation géométrique : quand $h\to 0^+$, la pente de la sécante tend vers 2

quand $h\to 0^-$, la pente de la sécante tend vers -2

6

$f(t)=t^{10}-7t^2+3$

$$f'(-1)=\lim_{t\to-1}\frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)}=\lim_{t\to-1}\frac{(t^{10}-7t^2+3)-(1-7+3)}{t+1}=\lim_{t\to-1}\frac{t^{10}-7t^2+6}{t+1}$$

on sait que $t^{10}-7t^2+6$ doit être divisible par $t+1$;

Après la division polynomiale :

$$
\begin{array}{r|l}
t^{10}-7t^2+6 & t+1 \\ \cline{2-2}
\underline{t^{10}+t^9} \qquad\qquad & t^9-t^8+t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t^2-6t+6 \\
-t^9-7t^2+6 & \\
\underline{-t^9-t^8} \qquad\qquad & \\
t^8-7t^2+6 & \\
\underline{t^8+t^7} \qquad\qquad & \\
-t^7-7t^2+6 & \\
\underline{-t^7-t^6} \qquad\qquad & \\
t^6-7t^2+6 & \\
\underline{t^6+t^5} \qquad\qquad & \\
-t^5-7t^2+6 & \\
\underline{-t^5-t^4} \qquad\qquad & \\
t^4-7t^2+6 & \\
\underline{t^4+t^3} \qquad\qquad & \\
-t^3-7t^2+6 & \\
\underline{-t^3-t^2} \qquad\qquad & \\
-6t^2+6 & \\
\underline{-6t^2-6t} \qquad & \\
6t+6 & \\
\underline{6t+6} & \\
0 &
\end{array}
$$

D'où $f(t)=t^{10}-7t^2+6=(t^9-t^8+t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t^2-6^t+6)(t+1)$

et

$$f'(-1)=\lim_{t\to-1}\frac{(t^9-t^8+t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t^2-6t+6)(t+1)}{t+1}=\lim_{t\to-1}(t^9-t^8+t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t^2-6t+6)$$

$$=(-1)^9-(-1)^8+(-1)^7-(-1)^6+(-1)^5-(-1)^4+(-1)^3-(-1)^2-(-1)\cdot6+6=-8+12=4$$