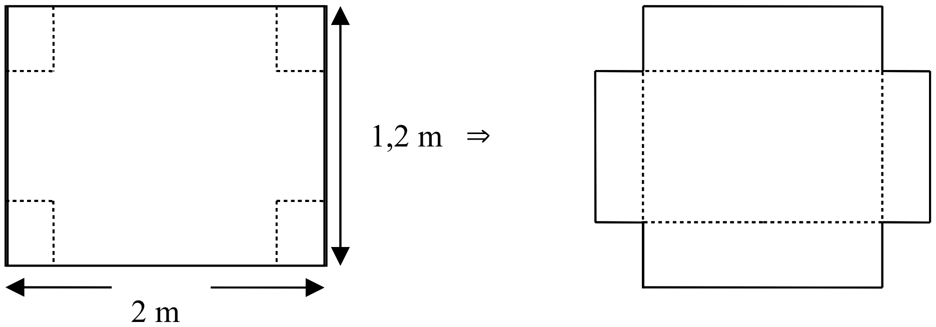
Vous disposez d'un stock de plaques rectangulaires au contour rigide, mesurant 1,2 mètres de large et 2 mètres de long.
Pour votre prochain déménagement, vous désirez construire des cartons, ouverts vers le haut (en forme de parallélépipèdes rectangles) selon le procédé suivant: on découpe dans les quatre coins de la plaque le même carré, puis on plie les côtés et on les scotche pour former la boîte.

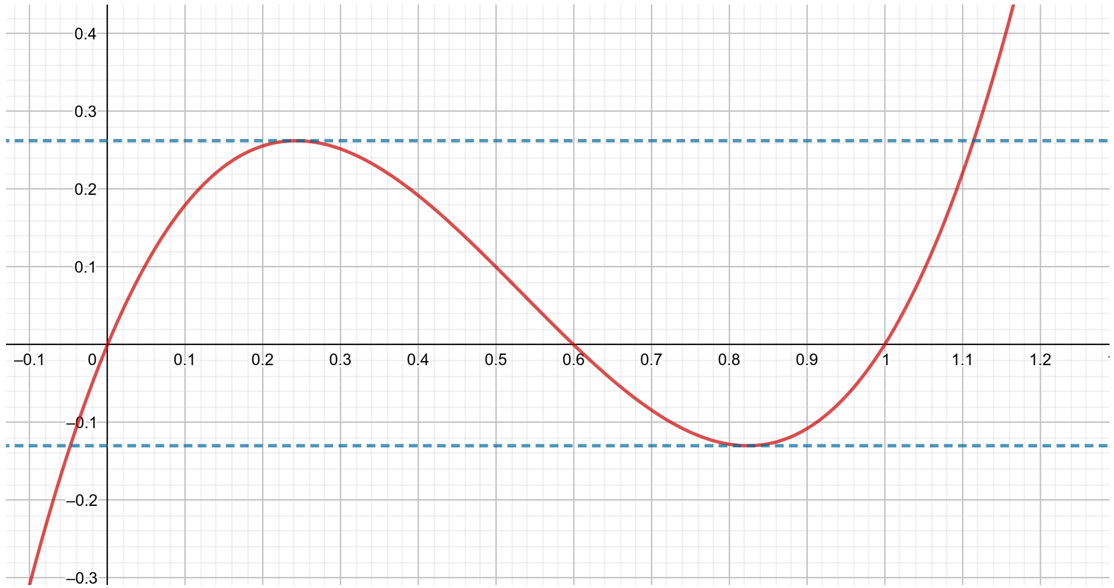


Pour éviter de monter les 12 étages sans ascenseur de votre nouvel immeuble trop souvent, vous aimeriez que vos boîtes aient le plus grand volume possible. Comment choisir les dimensions du carré à découper pour que le volume soit maximal ?

Résolution :

Soit V le volume en fonction de la découpe x :

$$V(x)=x(1{,}2-2x)(2-2x)=4x^3-6{,}4x^2+2{,}4x$$



On calcule la dérivée :

$$V'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[4(x+h)^3-6{,}4(x+h)^2+2{,}4(x+h)]-[4x^3-6{,}4x^2+2{,}4x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-6{,}4(x^2+2xh+h^2)+2{,}4(x+h)]-[4x^3-6{,}4x^2+2{,}4x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3-6{,}4x^2-12{,}8xh-6{,}4h^2+2{,}4x+2{,}4h]-[4x^3-6{,}4x^2+2{,}4x]}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3-12{,}8xh-6{,}4h^2+2{,}4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h[12x^2+12xh+4h^2-12{,}8x-6{,}4h+2{,}4]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[12x^2+12xh+4h^2-12{,}8x-6{,}4h+2{,}4]$$

$$= 12x^2+12x(0)+4(0)^2-12{,}8x-6{,}4(0)+2{,}4$$

$$= 12x^2-12{,}8x+2{,}4$$

puis on conclut en déterminant les zéros de $V'(x)$:

$$12x^2-12{,}8x+2{,}4=0$$

$$\Delta=(-12{,}8)^2-4\cdot 12\cdot 2{,}4=48{,}64$$

$$x_{1,2}=\frac{12{,}8\pm\sqrt{48{,}64}}{24}=\ldots=\frac{8\pm\sqrt{19}}{15}$$

c'est-à-dire $x_1=\dfrac{8-\sqrt{19}}{15}\simeq 0{,}24$ et $x_2=\dfrac{8+\sqrt{19}}{15}\simeq 0{,}82$