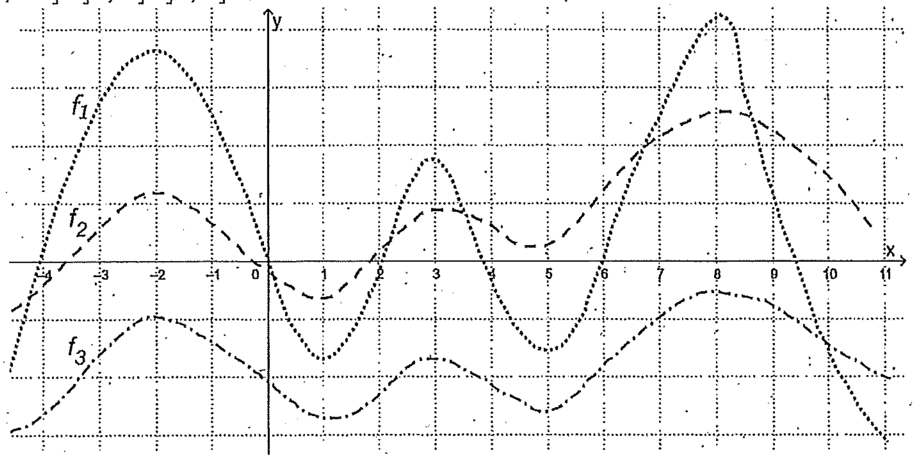
(Dé)croissance

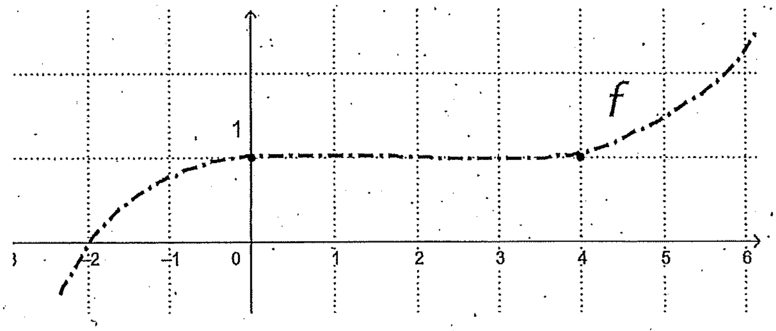
23

Un exemple de trois fonctions croissantes sur $]-\infty;-2]\cup]1;3]\cup]5;8]$ et décroissantes sur $\mathbb{R}\backslash]-\infty;-2]\cup]1;3]\cup]5;8]$.



24

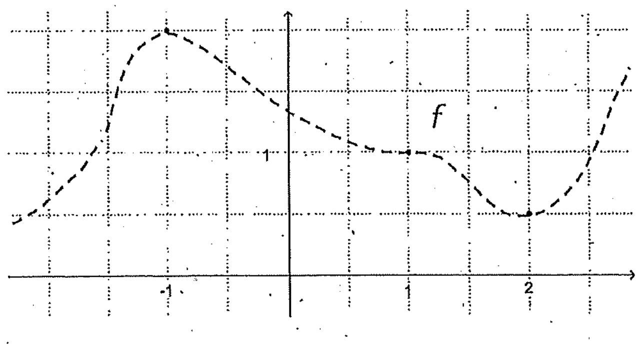
Un exemple de la fonction f croissante et décroissante sur $[0;4]$:



25

x		-1		1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

Un exemple :



26

Tableau de signes de f'

x		1		2		3	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	min	↗		↗

Alors f admet un minimum en $x=2$ mais pas de maximum.

27

$$f'(x)=(x^4-2x^3-12x^2+8x+6)'=4x^3-6x^2-24x+8=2\cdot\underbrace{(2x^3-3x^2-12x+4)}_{g(x)}.$$

$g(-2)=2\cdot(-8)-3\cdot4-12\cdot(-2)+4=0$, alors $g(x)$ est divisible par $(x+2)$.

On divise $g(x)$ par $x+2$:

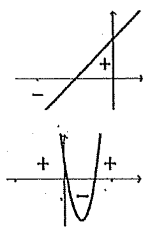
$$\begin{array}{l|l} 2x^3-3x^2-12x+4 & x+2 \\ \underline{2x^3+4x^2} & \overline{2x^2-7x+2} \\ \quad -7x^2-12x & \\ \quad \underline{-7x^2-14x} & \\ \qquad\quad 2x+4 & \\ \qquad\quad \underline{2x+4} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

D'où $f'(x)=2\cdot g(x)=2(x+2)(2x^2-7x+2)=2(x+2)[x-(\frac{7-\sqrt{33}}{4})][x-(\frac{7+\sqrt{33}}{4})]$

(car $\Delta=49-4\cdot2\cdot2=33 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$)

Tableau de signes :

x		-2		$\frac{7-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{7+\sqrt{33}}{4}$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^2-7x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	min	↗



Les points critiques sont :

Minimum : $(-2; f(-2))=(-2;-26)$

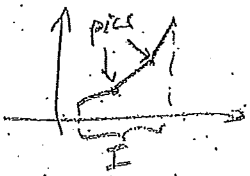
Maximum : $(\frac{7-\sqrt{33}}{4}; f(\frac{7-\sqrt{33}}{4}))\approx(0,31;7,28)$

Minimum : $(\frac{7+\sqrt{33}}{4}; f(\frac{7+\sqrt{33}}{4}))\approx(3,19;-51,96)$

ex28 a) Faux : la définition de $f \nearrow$ ou $f \searrow$ n'est pas stricte
ainsi une fct constante est à la fois $\nearrow$ et $\searrow$

b) Faux : on a démontré que si f est constante, alors $f'(x)=0$ (avec la déf)
donc $f(x)$ n'est pas str. croissante

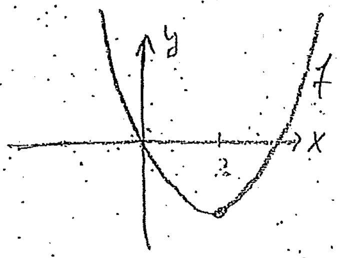
c) Faux, il faut que f soit dérivable
Contre-ex :



(par ex : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0;1] \\ 2x-1 & x \in [1;2] \end{cases}$
$\nearrow$ sur $[0;2]$
non dérivable en $x=1$)

d) Vrai. Dem : Contraposée : Si $f'(x) \geq 0$ sur I, alors f (dér) est $\nearrow$ sur I
vrai par Corollaire AF

ex29



f définie par $f(x) = (x-2)^2 - 4$ (par exemple)
car $f'(x) = 2(x-2) = 2x-4$ et $f(2) = 0$

x		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

ex30 $f'(x) = \dfrac{2x(x+k) - x^2}{(x+k)^2}$ on veut k tq $f'(x) = 0$: $f'(x) = 0 \iff 2x(x+k) - x^2 = 0$
(et $x \neq -k$)

$\iff x^2 + 2xk = 0$
$\iff x(x+2k) = 0$
$x = 0$ ou $x = -2k$

cas 1 ($k > 0$)

x		$-2k$		0	
x	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$x+2k$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$x=0$ n'est pas une solution
car $f(0) = 0 \neq 8$

cas 2 ($k < 0$)

x		0		$-2k$	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2k$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

f admet un minimum en $x = -2k$
on veut $f(-2k) = 8 \iff \dfrac{(-2k)^2}{-2k+k} = 8 \iff \dfrac{4k^2}{-k} = 8$

$\iff 4k^2 = -8k \iff 4k^2 + 8k = 0$

$\iff 4k(k+2) = 0$
$\cancel{k=0}$ ou $\boxed{k=-2 \quad (x=4)}$
cas 1 $\cancel{x=0}$

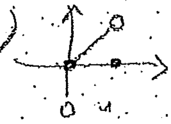
rem : $k<0$ donc est bien solution du cas 2 ex31 $f'(x)=3x^2+2ax-6$

on veut $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1-6=0 \Leftrightarrow 2a=3 \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$

et $f(1)=1 \Leftrightarrow 1^3+a-6+b=1 \Leftrightarrow a+b=6$

d'où $b=6-\frac{3}{2}=\boxed{\frac{9}{2}=b}$

ex32 b) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ cf cho...

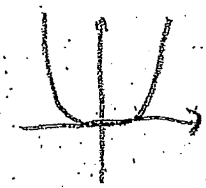
a)  $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0;1[\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$

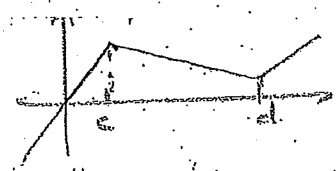
[disc en cours...]

ex33 a) Faux ; contre-exemple $f(x)=x^4$ en $x=0$

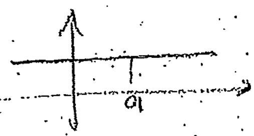
$(x^4)'=4x^3 \Rightarrow f'(0)=0$

$(x^4)''=12x^2 \Rightarrow f''(0)=0$

mais  il n'y a pas de pt d'inflexion en $x=0$ (il faut un chgmt de signe de $f''(x)$!)

b) Faux ! contre-ex :  pas de changement de convexité (concavité) entre c et d

c) Vrai ⚠ dans cette formulation le "vrai" est justifié avec un exemple !

 $f(x)=cte \Rightarrow f'(x)=0 \ \forall x\in I$

$f''(x)=0 \ \forall x\in I$

et a est bien un maximum

d) $f(x)=bx^3+cx^2+dx+e$ (⚠ a déjà utilisé dans l'énoncé ; et on a $b\neq 0$)

$f'(x)=3bx^2+2cx+d$ et $f''(x)=6bx+2c$, avec $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{3b}$

càd que f'' est de degré 1 :

donc ($b>0$)

x		$-c/3b$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	pt infl.	$\cup$

ou

x		$-c/3b$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	pt infl.	$\cap$

changement de concavité ⇔ convexité (déf de pt inflexion)

ex 34 on veut $f''(x) = (x-1)(x-2)$ (par exemple)

$= x^2 - 3x + 3$

donc $f'(x) = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x$

$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

(rem: on pourrait prendre $12\cdot f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2$)

ex 35 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ // $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ // $f''(x) = 6ax + 2b$

(a) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$ ①
$f(1) = 16 \Leftrightarrow a + b + c + d = 16$ ②
$f'(5) = 0 \Leftrightarrow 75a + 10b + c = 0$ ③
$f(5) = -16 \Leftrightarrow 125a + 25b + 5c + d = -16$ ④

syst. de 4 éq. à 4 inc (linéaires)

on peut résoudre avec la TI-30 des syst 3x3 ; il faut donc d'abord réduire à un syst 3x3 : ④ - ③ :

$$\begin{cases} 124a + 24b + 4c = -32 & ⑤ \\ 3a + 2b + c = 0 & ① \\ 75a + 10b + c = 0 & ③ \end{cases}$$

puis avec la TI-30 : $a = 1$ $b = -9$ $c = 15$

et donc, dans ② : $d = 16 - a - b - c = 16 - 1 + 9 - 15 = 9$

càd $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9$

(b) $f'(x) = (x^3 - 9x^2 + 15x + 9)' = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-5)(x-1)$

$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		max	↘	min	↗

x		3	
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	∩	pt infl.	∪

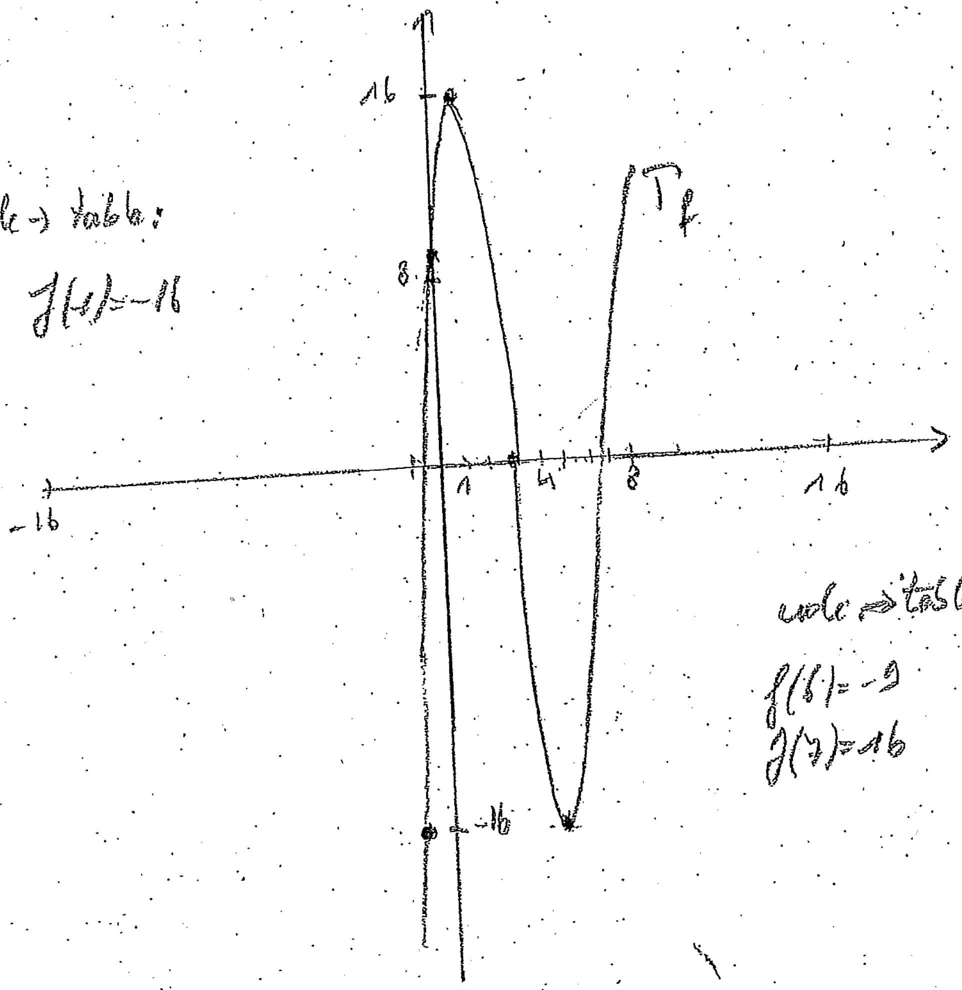
$f(1) = 16$ ✓
$f(5) = \ldots = -16$ ✓

$f(3) = 0$
pt infl. $(3; 0)$

(c)

calc → table :

$f(-1) = -16$



calc ⇒ table :

$f(6) = -9$

$f(7) = 16$

ex37 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ // $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ // $f''(x)=6ax+2b$

on veut : $f''(1)=0 \Leftrightarrow 6a+2b=0$ ①
$f'(3)=11 \Leftrightarrow 27a+6b+c=11$ ② syst 4×4
$t(3)=6=f(3) \Leftrightarrow 27a+9b+3c+d=6$ ③
et enfin : $(1;0)\in\Gamma_f \Leftrightarrow a+b+c+d=0$ ④

on réduit à 3×3 : ③ − ④ : $26a+8b+2c=6$

et on résout avec la TI-30 : $a=1$ // $b=-3$ // $c=2$
et donc, dans ④ : $d=-1+3-2=0$

Ainsi : $f(x)=x^3-3x^2+2x \Rightarrow f(3)=27-27+6=6$
$f'(x)=3x^2-6x+2 \Rightarrow f'(3)=27-18+2=11$
$f''(x)=6x-6$

x		1	
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	∩	inflc.	∪

vérif tangente : $y=f'(3)(x-3)+f(3)=11(x-3)+6=11x-27$ ok ☺

Graphe avec TI-30 Table, ou GeoGebra / Photomath

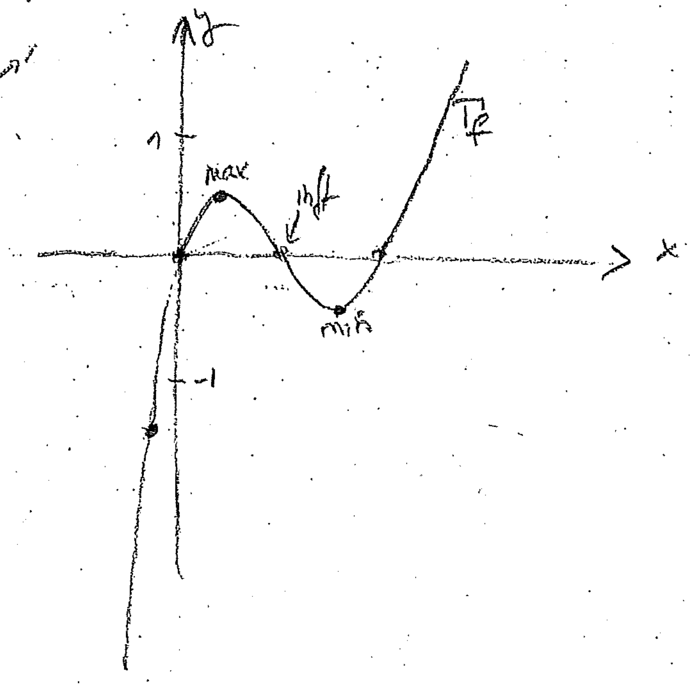
ou esquisse :
$f(x)=x(x^2-3x+2)$
$=x(x-2)(x-1)$

x		0		1		2	
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

$f'(x)=0 : \Delta=12$
$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
$x_1\cong 0,4$ et $x_2\cong 1,6$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$f(x_1)\cong 0,4$ $f(x_2)\cong -0,4$



ex 36 1 condition sur l'inflexion ⇒ $f''(x)$ de degré 1 ...

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

on veut : $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 2b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$ (1)

$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 27a + 6b + c = 0$ (2)

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$ (3)

avec la TI-30 : infinité solutions...

explication : (2) − (3) : $24a + 4b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$ idem à (1)

on peut donc choisir, par exemple : $a = -1$, $b = 6$

puis, dans (3) : $c = 3 - 12 = -9$

$f''(x) = -6x + 12$

x		2	
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	∪	pt infl	∩

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x-3)(x-1)$

x		1		3	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	m	↗	M	↘

⚠ le max et le min sont échangés !
donc on prend $a = 1$ / $b = -6$ / $c = 9$

càd $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + d$

d est quelconque, donc le plus simple : $d = 0$

⇒ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)^2$ [tbls inversé]

$f''(x) = 6x - 12$ [tbls inversé]

càd $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + d$
d est qcq (par ex $d = 0$)

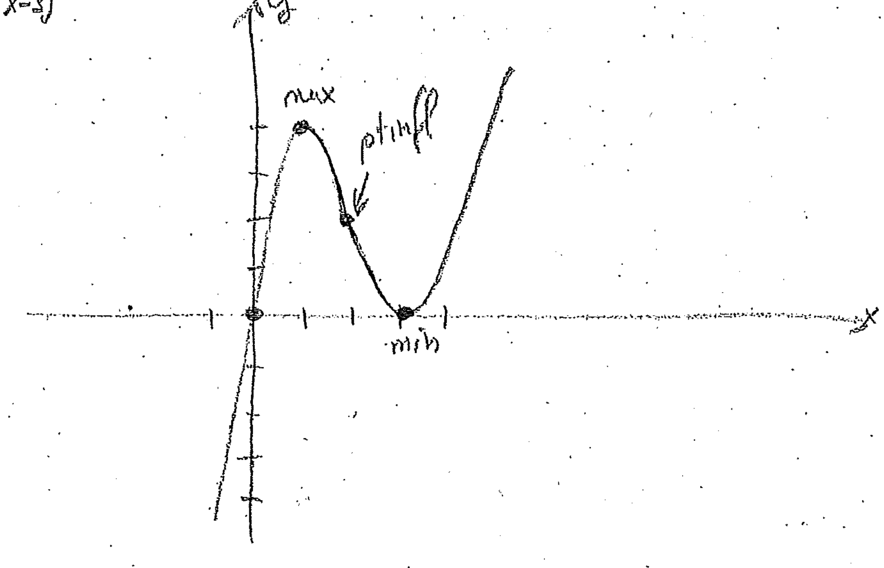
Graphe avec TI-30 Table, ou avec GeoGebra / Photomath

ou esquisse : $f(x) = x(x-3)^2$

$f(1) = 4$

$f(2) = 2$

$f(3) = 0$



rem : on peut aussi résoudre à la main !

(5) $124a + 24b + 4c = -32$
(1) $3a + 2b + c = 0$
(3) $75a + 10b + c = 0$

(6) : (5) $- 4\cdot$(1) : $112a + 16b = -32$
(7) : (3) $-$ (1) : $72a + 8b = 0 \quad |\cdot(-2)|$

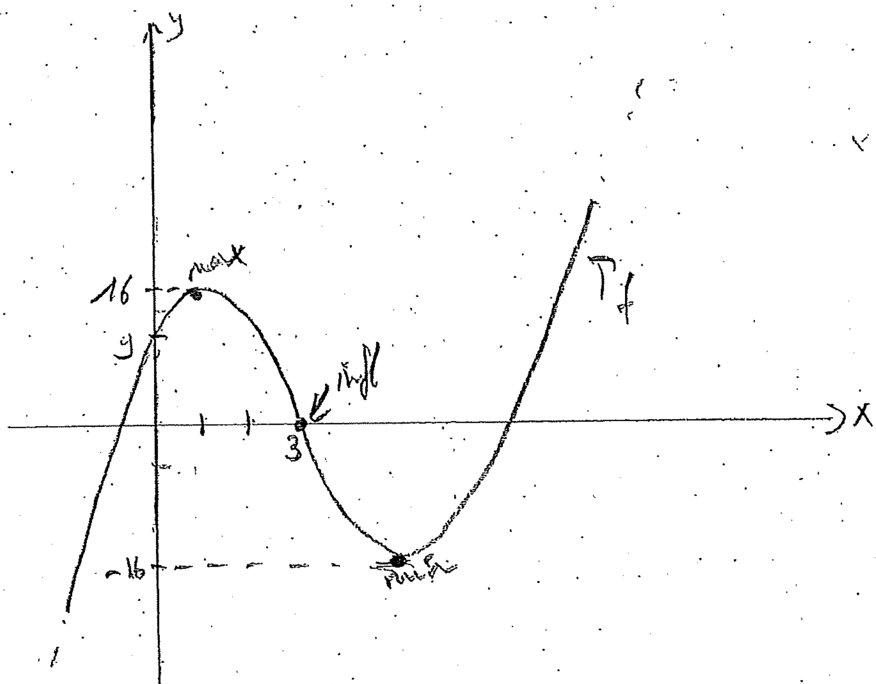
$-32a = -32$
$\Leftrightarrow a = 1$

dans (7) : $72\cdot 1 + 8b = 0 \Leftrightarrow b = -72/8 = -9$
dans (1) $c = -3a - 2b = -3 + 18 = 15$, puis dans (2) : $d = \ldots = 9$

a) avec la fonction "Table" (ou GeoGebra, ou Photomath) :

ou esquisse

$f(x) := x^3 - 9x^2 + 15x + 9$
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$
$= 3(x^2 - 6x + 5)$
$= 3(x-5)(x-1)$
$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$
$f(5) = -16$
$f(1) = 16$
$f(3) = 0$



b) $f''(x) = 6(x-3)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = +3$

x		3	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	pt infl	$\smile$

$f(3) = \frac{1}{2}(27 - 81 + 45 - 25) = 10$

$(3;10)$ est le pt d'inflexion