Optimisation

38

1. Soient x et y les deux nombres
2. La somme de cubes à optimiser : x^3+y^3
3. On a : $x+y=16$ donc $y=16-x$
4. D'où la somme de cubes en fonction de x seul :

$$S(x)=x^3+(16-x)^3=x^3+4096-768x+48x^2-x^3=48x^2-768x+4096=16(3x^2-48x+256)$$

5. $S'(x)=16(6x-48)=16\cdot 6\cdot(x-8)=96(x-8)$

7. $Z_{S'(x)}=\{\ 8\ \}$

8. Tableau de signes :

x		8	
x-8	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Remarque : comme les deux nombres sont positifs, on a : $D_{vip}=[0{,}16]$

a.

9. La fonction $S(x)$ admet un minimum en $x=8$ d'où $y=16-8=8$.

10. Le minimum de la somme des cubes est atteint pour les deux nombres 8 et 8 (il vaut $8^3+8^3=1024$).

b.

9. Le maximum de la somme des cubes n'apparaît pas dans le tableau, mais comme $D_{vip}=[0{,}16]$, le maximum est atteint sur le « bord» : soit pour $x=0$ soit pour $x=16$.

Il faut calculer les images :

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=16-0=16:\ x^3+y^3=0^3+16^3 \\ x=16 \Rightarrow y=16-16=0:\ x^3+y^3=16^3+0^3 \end{array}\right\}\ \text{solutions symétriques}$$

10. Le maximum de la somme des cubes est atteint pour les nombres 0 et 16 (il vaut $0^3+16^3=16^3=4096$).

39

1. Soient x et y les deux nombres

a.

2. Le produit à optimiser : $x\cdot y$

3. Réduire à une variable : $x+y=20$ donc $y=20-x$

4. D'où le produit ces deux nombres en fonction de x seul : $f(x)=x(20-x)=20x-x^2$

5. $f'(x)=20-2x=2(10-x)$.

7. Zéros de $f'(x)$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 10-x=0 \Leftrightarrow x=10$. Alors $Z_f'(x)=\{10\}$

8. Tableau de signes :

x		10	
10-x	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	max	↘

9. La fonction $f(x)$ admet un maximum en $x=10$ d'où $y=20-x=20-10=10$
10. Le produit est maximal pour les nombres 10 et 10 (il vaut $10\cdot 10=100$)

b.

2. La somme des carres à optimiser : x^2+y^2

3. Réduire à une variable : $x+y=20$ donc $y=20-x$

4. D'où la somme des carres en fonction de x seul : $f(x)=x^2+(20-x)^2$

5. $f'(x)=2x+2(20-x)(-1)=2x-40+2x=4x-40=4(x-10)$.

7. Zéros de $f'(x)$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \Leftrightarrow x=10$. Alors $Z_f'(x)=\{10\}$

8. Tableau de signes :

x		10	
x-10	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

9. La fonction $f(x)$ admet un minimum en $x=10$ d'où $y=20-x=20-10=10$
10. La somme des carrés est minimale pour les nombres 10 et 10 (elle vaut $10^2+10^2=200$).

c.

2. À optimiser : $x^2\cdot y^3$
3. Réduire à une variable : $x+y=20$ donc $y=20-x$
4. D'où $x^2\cdot y^3$ en fonction de x seul : $f(x)=x^2\cdot(20-x)^3$
5. $f'(x)=2x(20-x)^3+3x^2(20-x)^2(-1)=x(20-x)^2[2(20-x)-3x]=5x(8-x)(20-x)^2$

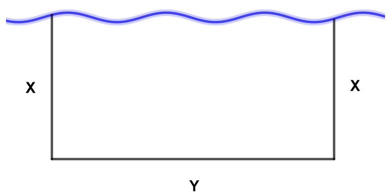
7. $Z_f'(x)=\{0;8;20\}$

8. Tableau de signes :

x		0		8		20	
x	–	0	+	+	+	+	+
$8-x$	+	+	+	0	–	–	–
$(20-x)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	–
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	Pt. infl	↘

9. La fonction $f(x)$ admet un maximum en $x=8$ d'où $y=20-x=20-8=12$
10. Les deux nombres sont 8 et 12 (Le maximum du produit du carré du premier par le cube du second vaut $8^2 \cdot 12^3=110592$).

40



1. Soient x - la longueur d'un côté,

   y - la longueur d'autre côté

2. L'aire du champ à optimiser: xy

3. Réduire à une variable : $2x+y=4000$ donc $y=4000-2x$

4. D'où l'aire en fonction de x seul : $A(x)=x(4000-2x)=4000x-2x^2$

5. $A'(x)=4000-4x=4(1000-x)$

7. $Z_{A'(x)}=\{1000\}$

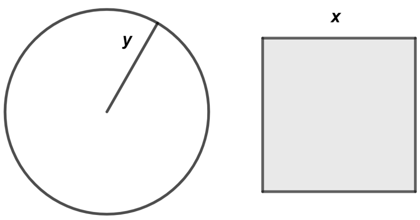
8. Tableau de signes :

x		1000	
$1000-x$	+	0	–
$A'(x)$	+	0	–
$A(x)$	↗	max	↘

9. La fonction $A(x)$ admet un maximum en $x=1000$ d'où $y=4000-2x=2000$

10. Les dimensions du champ d'aire maximale sont $1000\,m$ et $2000\,m$.

41



1. Soient x - le côté du carré et

   y - le radius du cercle

2. L'aire totale à optimiser : πy^2+x^2

3. La longueur de la courbe totale est :

$$2\pi y+4x=200 \quad \text{donc} \quad x=\frac{100-\pi y}{2}$$

4. D'où l'aire en fonction de y seul : $A(y)=\pi y^2+\left(\frac{100-\pi y}{2}\right)^2$

5. $A'(y)=2\pi y+2\cdot\frac{100-\pi y}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})=2\pi y-\frac{\pi}{2}(100-\pi y)=\frac{\pi}{2}(4y+\pi y-100)=\frac{\pi}{2}[y(4+\pi)-100]$

7. $A'(y)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}[y(4+\pi)-100] \Leftrightarrow y(4+\pi)-100=0 \Leftrightarrow y=\frac{100}{4+\pi}$. D'où $Z_{A'(y)}=\{\frac{100}{4+\pi}\}$

8. Tableau des signes :

y		$\frac{100}{4+\pi}$	
$y(4+\pi)-100$	$-$	0	$+$
$A'(y)$	$-$	0	$+$
$A(y)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

a.

9. La fonction $A(y)$ admet un minimum en $y=\frac{100}{4+\pi}$

d'où $x=\frac{100-\pi y}{2}=\frac{100-\pi\cdot\frac{100}{4+\pi}}{2}=\frac{400+100\pi-100\pi}{2(4+\pi)}=\frac{200}{4+\pi}$

10. On a alors le partage : $2\pi\cdot\frac{100}{4+\pi}\simeq 88\,m$ pour le cercle et $4\cdot\frac{200}{4+\pi}\simeq 112\,m$ pour le carré. La valeur de l'aire totale pour ce partage vaut $\pi\left(\frac{100}{4+\pi}\right)^2+\left(\frac{200}{4+\pi}\right)^2\simeq 1400\,m^2$.

b.

9. La fonction $A(y)$ admet un maximum sur le bord .

Domaine restreint pour y est $0\leq 2\pi y\leq 200 \Leftrightarrow 0\leq y\leq\frac{100}{\pi}$. Il faut comparer les bordes :

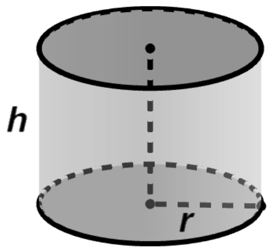
soit $y=0$, donc $A(0)=\pi\cdot 0^2+(\frac{100-\pi\cdot 0}{2})^2=50^2=2500$ - seul un carré ;

soit $y=\frac{100}{\pi}$, donc $A(\frac{100}{\pi})=\pi\cdot(\frac{100}{\pi})^2+(\frac{100-\pi\cdot(\frac{100}{\pi})}{2})^2=\frac{10000}{\pi}\simeq 3184{,}7$ - seul un cercle.

Alors, la fonction $A(y)$ admet un maximum en $y=\frac{100}{\pi}$ d'où $x=0$

10. L'aire maximal est donc pour un cercle seul et est égale à $\simeq 3184{,}7\,m^2$.

42



1. Soient r - le radius, h - la hauteur de la boîte

2. La surface à optimiser : $\pi r^2 \cdot 2 + h \cdot 2\pi r$

3. On sait que le volume de la boîte est égale à 1l =1dm³,

   alors $1 = \pi r^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

4. $S(r) = \pi r^2 \cdot 2 + \dfrac{1}{\pi r^2} \cdot 2\pi r = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$

5. $S'(r) = 4\pi r + 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{r^2}\right) = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2}$

6. $S'(r) = \dfrac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = \dfrac{2(2\pi r^3 - 1)}{r^2}$

7. $S'(r) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(2\pi r^3 - 1)}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \{2\pi r^3 - 1 = 0 \text{ et } r \neq 0\} \Leftrightarrow 2\pi r^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$

   D'où $Z_{S'(r)} = \left\{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}\right\}$

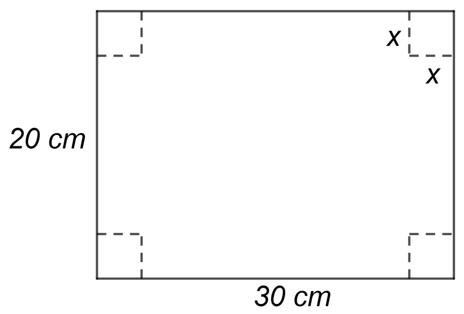
8. Tableau de signes (pour $r > 0$) :

r		$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	
$2\pi r^3 - 1$	$-$	0	$+$
r^2	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

9. La fonction $S(r)$ admet un minimum en $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}} \simeq 0{,}54$ d'où $h = \dfrac{1}{\pi r^2} \simeq 1{,}08$.

10. La surface est minimale si le radius est égal à $\simeq 0{,}54\, dm$ et la hauteur est égale à $\simeq 1{,}08\, dm$.

43



1. Soit x - la hauteur de la boîte

3. Les deux autres côtés sont $(20 - 2x)$ et $(30 - 2x)$

2. Le volume à optimiser : $V = x(20 - 2x)(30 - 2x)$

4. $V(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)x = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

5. $V'(x) = 600 - 200x + 12x^2 = 4(3x^2 - 50x + 150)$

6. $\Delta=(-50)^2-4\cdot3\cdot150=2500-1800=700$ et $x_{1,2}=\frac{50\pm\sqrt{700}}{2\cdot3}=\frac{50\pm10\sqrt{7}}{2\cdot3}=\frac{25\pm5\sqrt{7}}{3}$

d'où $V'(x)=4(3x^2-50x+150)=12(x-\frac{25-5\sqrt{7}}{3})(x-\frac{25+5\sqrt{7}}{3})$

7. $Z_{V'(x)}=\{\frac{25-5\sqrt{7}}{3};\frac{25+5\sqrt{7}}{3}\}$

8. Tableau de signes :

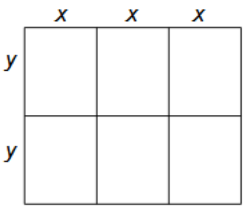
x		$\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$		$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Remarque : $D_{vip}=]0;10[$

9. La fonction $V(x)$ atteint un maximum en $x=\frac{25-5\sqrt{7}}{3}\simeq3{,}9$

10. Le volume de la boîte est maximal si la hauteur est égale à $\simeq3{,}9\,cm$.

44



1. Soient x - la largeur et y - la longueur d'un enclos

2. La surface à optimiser : $3x\cdot2y$

3. On a $9x+8y=288 \Leftrightarrow y=\frac{288-9x}{8}$

4. La surface en fonction de x seul :

$$S(x)=3x\cdot2\cdot\frac{288-9x}{8}=\frac{3x(288-9x)}{4}=\frac{3x\cdot4\cdot72}{4}-\frac{3\cdot9x^2}{4}=3x\cdot72-\frac{27x^2}{4}=216x-\frac{27x^2}{4}$$

5. $S'(x)=216-\frac{2\cdot27x}{4}=216-\frac{27x}{2}$

7. $S'(x)=0 \Leftrightarrow 216-\frac{27}{2}x=0 \Leftrightarrow \frac{27}{2}x=216 \Leftrightarrow x=\frac{432}{27}=16$. Alors $Z_{S'(x)}=\{16\}$

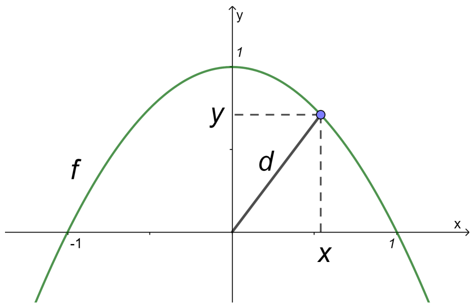
8. Tableau de signes :

x		16	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	max	↘

9. La fonction $S(x)$ admet un maximum en $x=16$, d'où $y=\frac{288-9\cdot16}{8}=\frac{188}{8}=18$

10. La surface est maximale si les dimensions des enclos sont $16\,m$ et $18\,m$.

45



1. Soient x et y - les coordonnes le point de la courbe

2. La distance à optimiser : $\sqrt{x^2+y^2}$ (>0)

3. On a $y=1-x^2$

4. D'où la distance en fonction de x seul : $d(x)=\sqrt{x^2+(1-x)^2}$

5.

$$d'(x)=[[x^2+(1-x^2)^2]^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}[x^2+(1-x^2)^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+(1-x^2)^2)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}}\cdot(2x+2(1-x^2)\cdot(1-x^2)')$$

$$=\frac{2x+2(1-x^2)\cdot(-2x)}{2\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}}=\frac{2x-4x(1-x^2)}{2\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}}=\frac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}}=\frac{2x(2x^2-1)}{2\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}}=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}}$$

7. $d'(x)=0 \Leftrightarrow \{x(2x^2-1)=0 \text{ et } \sqrt{x^2+(1-x^2)^2}\neq 0\} \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2x^2-1=0$

(car $\sqrt{x^2+(1-x^2)^2}\neq 0\,\forall x$). D'où $Z_{d'(x)}=\{-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

8. Tableau de signes :

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\sqrt{x^2+(1-x)^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

9. La fonction $d(x)$ atteint un minimum en $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $y=1-x^2=1-(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

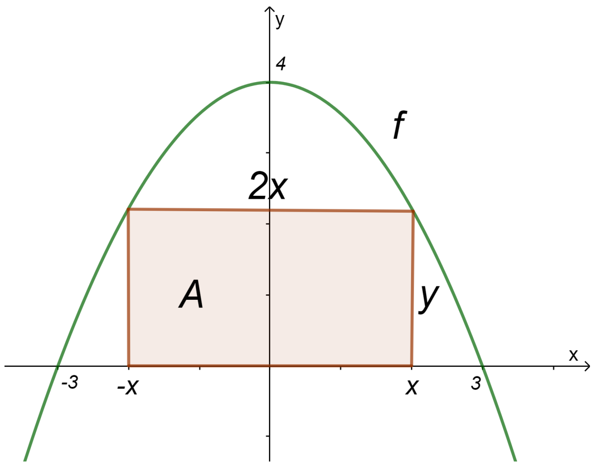
10. Les points de la courbe de $y=1-x^2$ les plus proches à l'origine sont $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

46

1. Soient $x>0$ et $y>0$ - les coordonnes le point de la courbe

2. L'aire à optimiser : $2x\cdot y$

3. Équation de la courbe :



$$f(x)=a(x+3)(x-3)=a(x^2-9)$$

$$f(0)=4 \iff a(0^2-9)=4$$
$$\iff a(-9)=4$$
$$\iff a=-\frac{4}{9}$$

$$f(x)=-\frac{4}{9}(x^2-9)$$

Donc $y=f(x)=-\frac{4}{9}(x^2-9)$

4. D'où l'aire en fonction de x seul : $A(x)=2x\cdot(-\frac{4}{9})\cdot(x^2-9)=-\frac{8}{9}x(x^2-9)=-\frac{8}{9}x^3+8x$

5. $A'(x)=-\frac{8\cdot 3}{9}x^2+8=-\frac{8}{3}x^2+8$

6. $A'(x)=-\frac{8}{3}x^2+8=-\frac{8}{3}(x^2-3)=-\frac{8}{3}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

7. $Z_{A'(x)}=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

8. Tableau de signes :

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$-\frac{8}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
x^2-3	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

Rappel: $x\geq 0$

9. La fonction $A(x)$ atteint un maximum pour $x=\sqrt{3}$ d'où $y=-\frac{4}{9}((\sqrt{3})^2-9)=-\frac{4}{9}\cdot(-6)=\frac{8}{3}$

10. Les dimensions le rectangle sont $2x \times y$ ou $2\sqrt{3} \times \frac{8}{3}$.

47

On considère $f(x)=x^3-3x=x(x^2-1)$

On a $c=f(0{,}987654321)$ et $d=f(0{,}987654320)$

On étudie $f'(x)$:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$$

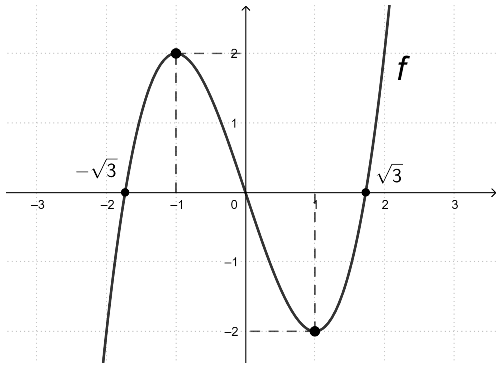


Tableau de signes :

x		-1		1	
$3(x^2-1)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Notons que $0<\underbrace{0{,}987654320}_{f^{-1}(d)}<\underbrace{0{,}987654321}_{f^{-1}(c)}<1$

Comme $f(x)$ ↘ sur $[0;1]$, on a $f(0{,}987654320)>f(0{,}987654321)$

donc $f(f^{-1}(d))>f(f^{-1}(c))$, alors $d>c$