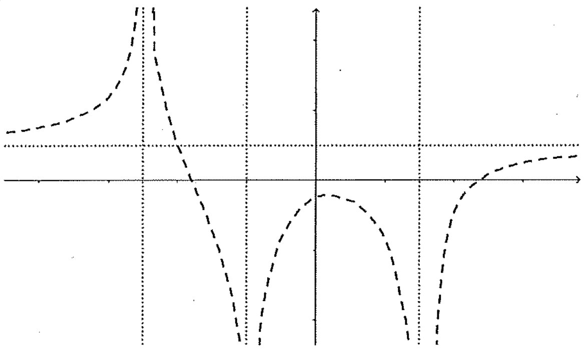
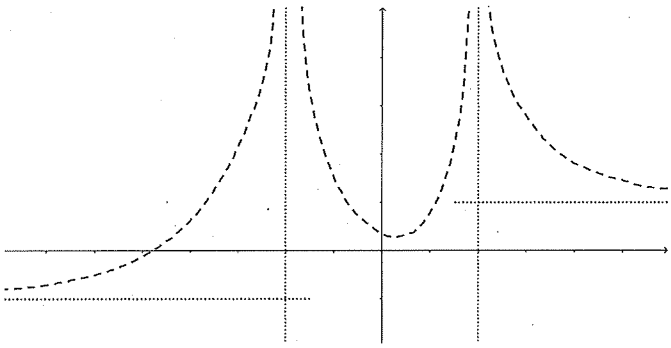
Asymptotes

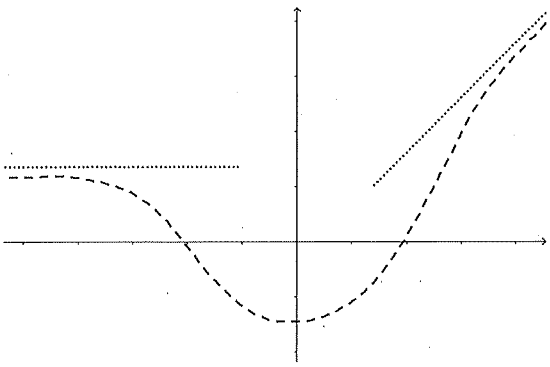
48



49



50



51 Par exemple $f(x)=\frac{-x^2}{(x-2)(x-4)}$

Aussi

$$f(x)=\frac{-x^2}{(x-2)(x-4)}\cdot\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2+2}}_{\substack{n'\,ajoute\,pas\,d'\,asymptote\,verticale\\ ne\,modifie\,l'\,asymptote\,horizontale}}$$ - une infinité de possibilités

ex 52

a) $x^4+1 \neq 0$ } donc pas d'as. verticale possible
f et rationnelle }

même degré num/dénom } as. horizontale et pas d'as. obl

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^4}(3-5/x^3)}{\cancel{x^4}(1+1/x^3)} = \frac{3}{1} = 3$: $y=3$ as. horz de f à $\pm\infty$

b) $f(x) = \frac{x(3x-5)}{(x+1)(x^2-x+1)}$ et $x^2-x+1 \neq 0$ car $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, donc

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{(-1)\cdot(-8)}{0^-\cdot 3} = -\infty$ } donc $x=-1$ as. vert de f

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{(-1)\cdot(-8)}{0^+\cdot 3} = +\infty$ }

d° num < d° dénom } as. horz $y=0$: vérif: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(3-5/x)}{x\cdot\cancel{x^3}(1+1/x^3)} = \frac{3}{(\pm\infty)\cdot 1} = 0$
f et rationnelle }

c) $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{2(x-2)x^2} \underset{\text{si } x\neq 2}{=} \frac{(x-1)}{2x^2}$, donc :

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-1}{2(0^-)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ } donc $x=0$ as. vert. de f ; $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{8}$ donc pas d'as. vert en $x=2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1}{2(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ }

Comme en b) : $y=0$ as. horz de f à $\pm\infty$

d) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{(2-x)(2+x)}$ et $x^2+2x+3 \neq 0$ car $\Delta = 4-12 = -8 < 0$, donc :

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{11}{0^+\cdot 4} = +\infty$ } $x=2$ as. vert. de f

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{11}{0^-\cdot 4} = -\infty$ }

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{4\cdot 0^-} = -\infty$ } $x=-2$ as. vert de f

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{4\cdot 0^+} = +\infty$ }

f et rat } ⇒ as. horz $y = \frac{1}{-1}$; vérif: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+2/x+3/x^2)}{\cancel{x^2}(-1+4/x^2)} = \frac{1}{-1} = -1$
d° num = d° dénom }

$y=-1$ as. horz de f à $\pm\infty$

ex 53

(a)

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x-3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\left(x^3+2x^2+x\right) & x-2 \\ \hline -2x^2-3x-3 & \\ -\left(-2x^2-4x-2\right) & \\ \hline x-1 & \end{array}$$

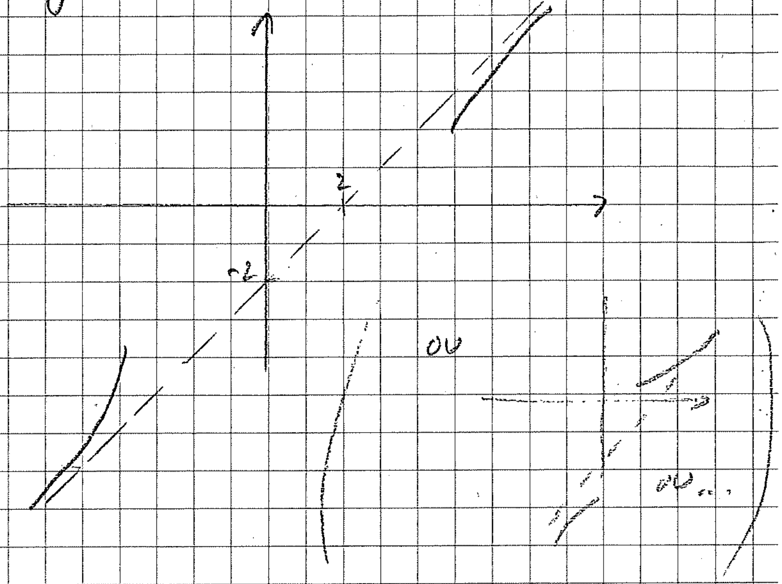
donc $x^3-2x-3=(x-2)(x^2+2x+1)+(x-1)$

$\Rightarrow f(x) = x-2+\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x-2)\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x(1-1/x)}{x^2(1+2/x+1/x^2)} = 0$

donc $y=x-2$ as. oblique de f à $\pm\infty$



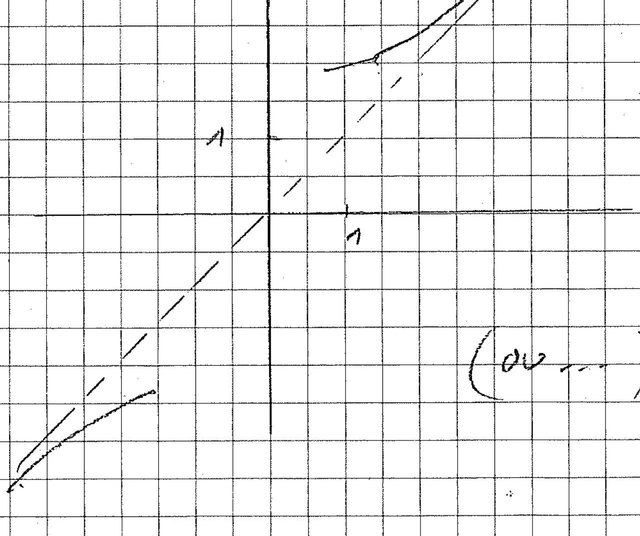
(b)

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -\left(x^2-2x\right) & x+1 \\ \hline x+2 & \\ -\left(x-2\right) & \\ \hline 4 & \end{array}$$

donc $f(x) = x+1+\dfrac{4}{x-2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x+1)\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$

$\Rightarrow y=x+1$ as. obl. de f à $\pm\infty$



(ou ...)

ex 53 (c) • $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}}$

$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+1/x)}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$ (idem à $x\to-\infty$)

donc $a = 1$

• $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\cdot x\right)\cdot\frac{\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}}+x\right)}{\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}}+x\right)}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{x}{x+1}\right)-x^2}{x\sqrt{\frac{x}{x+1}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{x+1}-1\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{-1}{x+1}\right)}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(1+1/x)}}{\sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+1/x)}}+1} = \frac{\frac{-1}{1+0}}{\sqrt{\frac{1}{1+0}}+1} = \frac{-1}{2} = b$

donc $y = 1\cdot x + \left(-\frac{1}{2}\right) = x - \frac{1}{2}$ as obl. de f à $+\infty$ (idem à $-\infty$)

(d) • $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2px+k}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+2p/x+k/x^2}}{x}$

d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\cdots}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+2p/x+k/x^2} = 1 = a$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\cdots}}{x} = \lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+2p/x+k/x^2} = -1 = a$

• à $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2px+k}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+2px+k}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2px+k}+x\right)}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+2px+k)-\cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1+\frac{2p}{x}+\frac{k}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(2p+k/x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+2p/x+k/x^2}+1\right)} = 2p$

à $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2px+k}-(-x)\right)\frac{\left(\sqrt{\cdots}-x\right)}{\left(\sqrt{\cdots}-x\right)} = \cdots = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(2p+k/x)}{-\cancel{x}(\sqrt{\cdots}+1)}$

$= -2p$

donc $y = 1\cdot x + 2p = x + 2p$ as obl de f à $+\infty$

$y = -x - 2p$ " " " " " $-\infty$

ex 54

as. vert — as. horiz / obl

$n=0$

$f(x)=\frac{4}{x^2-9}$ ... $\left.\begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\right\}$ as. vert de f

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\dots=0$; $y=0$ as. horiz de f à $\pm\infty$ (pas d'as. obl)

$n=1$

$f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$ ... $x=3$ as vert de f

$=\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}$

$\underset{si\, x\neq -3}{=}\frac{1}{x-3}$

pas d'as vert en $x=-3$ car $\lim_{x\to -3} f(x)=-1/6$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\dots=0$; $y=0$ as horiz de f à $\pm\infty$ (pas d'as obl.)

$n=2$

$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-9}$ ... $\left.\begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\right\}$ as. vert de f

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\dots=1$

$y=1$ as. horiz de f à $\pm\infty$ (pas d'as. obl.)

$n=3$

$f(x)=\frac{x^3+3}{x^2-9}$ ... $\left.\begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\right\}$ as vert de f

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ pas d'as horiz

$$\begin{array}{r|l} x^3+3 & x^2-9 \\ \hline -\ \ x^3-9x & x \\ -9x+3 & \end{array}$$

donc $f(x)=x+\frac{-9x+3}{x^2-9}$

d'où $y=x$ as. obl de f à $\pm\infty$

ex 55

(i) $f(x)=(3x-5)+\frac{1}{x} = \frac{3x^2-5x+1}{x}$

(ii) $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$

(iii) $f(x)=\frac{1}{x-7}$

(iv) $f(x)=\frac{x}{(x-3)(x+10)}$

(v) $f(x)=(-2x+5)+\frac{1}{x-5} = \frac{(-2x+5)(x-5)+1}{x-5}$

$=\frac{-2x^2+5x+10x-25+1}{x-5}=\frac{-2x^2+15x-24}{x-5}$

beaucoup de réponses possibles !

ex.56 • $x=-3$ as. verticale $\Rightarrow d=3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+3}$

• $y=-2x+1$: $a=-2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2+3x} \Leftrightarrow a=-2$$

$$b=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)+2x=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x^2+bx+c}{x+3}+2x\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{-2x^2}+bx+c+\cancel{2x^2}+6x}{x+3}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(b+6)x+c}{x+3}=1$$

$$\Leftrightarrow b+6=1$$

$$\Leftrightarrow b=-5 \quad \text{donc } f(x)=\frac{-2x^2-5x+c}{x+3}$$

• $A(2;-2)\in \Gamma_f \Leftrightarrow f(2)=-2$

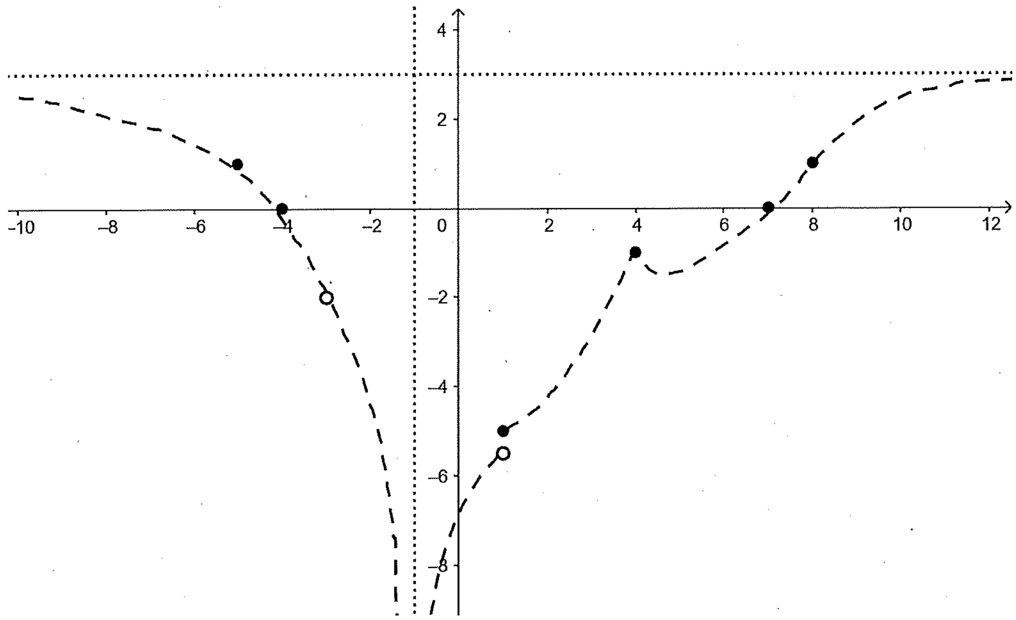
$$\Leftrightarrow \frac{-2\cdot 4-5\cdot 2+c}{5}=-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-18+c}{5}=-2$$

$$\Leftrightarrow -18+c=-10$$

$$\Leftrightarrow c=8$$

57 Par exemple :



58 Les exemples des fonctions t.q. $f(3)$ n'existe pas et $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

a.

b.