Ma3NA – Ch3 – Activité 23a: Corrigé
Etudier la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x$.

On a : $f(x)=\underbrace{x^3-4x}_{\text{forme développée}}=x(x^2-4)=\underbrace{x(x-2)(x+2)}_{\text{forme factorisée}}$

1. pas de division ni de racine carrée (ni de log ...) : $D_f=\mathbb{R}$

2. $f(0)=0$ et $f(x)=0\Leftrightarrow=\underbrace{x(x-2)(x+2)}_{\text{forme factorisée}}=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ ou $x=-2$, donc $Z_f=\{-2;0;2\}$

3. Asymptotes verticales et horizontales: : f est polynomiale, donc ne peut pas avoir d'as. vert. ou horiz/obl

4. $f'(x)=(\underbrace{x^3-4x}_{\text{forme développée , car la dérivée sera de degré } 2\rightarrow \text{ on maîtrise !}})'=3x^2-4$

5. f' de degré 2, pas de souci de factorisation

6. Zéros de f': $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$

$Z_{f'}=\{-\frac{2\sqrt{3}}{3};+\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$

7. Tableau de signes de la dérivée :

x		$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

8. min : $f(\frac{-2\sqrt{3}}{3})=(\frac{-2\sqrt{3}}{3})^3-4(\frac{-2\sqrt{3}}{3})=(\frac{-8\cdot 3\sqrt{3}}{27})+(\frac{8\sqrt{3}}{3})=\frac{-24\sqrt{3}+72\sqrt{3}}{27}=\frac{48\sqrt{3}}{27}=\frac{16\sqrt{3}}{9}\simeq 3{,}08$

donc ($(\frac{-2\sqrt{3}}{3};\frac{16\sqrt{3}}{9})\simeq(-1{,}15;3{,}08)$ est un minimum

max : $f(\frac{2\sqrt{3}}{3})=(\frac{2\sqrt{3}}{3})^3-4(\frac{2\sqrt{3}}{3})=(\frac{8\cdot 3\sqrt{3}}{27})-(\frac{8\sqrt{3}}{3})=\frac{24\sqrt{3}-72\sqrt{3}}{27}=\frac{-48\sqrt{3}}{27}=\frac{-16\sqrt{3}}{9}\simeq -3{,}08$

donc ($(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{16\sqrt{3}}{9})\simeq(1{,}15;-3{,}08)$ est un maximum

9. Deuxième dérivée : $f''(x)=6x$

x		0	
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	concave	max	convexe

Point d'inflexion en (0;0)

10. Représentation graphique :