Corollaire du théorème des accroissements finis

Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ est telle que f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$

Alors:

si $f'(x)>0, \forall x\in]a;b[$, alors f est croissante sur $[a;b]$

si $f'(x)<0, \forall x\in]a;b[$, alors f est décroissante sur $[a;b]$

si $f'(x)=0, \forall x\in]a;b[$, alors f est constante sur $[a;b]$

Démonstration pour le cas où $f'(x)<0$ sur $]a;b[$

Soit $x\in[a;b]$ et $y\in[a;b]$, avec $x<y.$. On a :

f est dérivable sur $]x;y[$, car [ARG 1: f est continue sur $[a;b]$ par hyp et $]x;y[\subset[a;b]$]
f est continue sur $[x;y]$, car [ARG 2: f est dérivable sur $]a;b[$ par hyp et $]x;y[\subset[a;b]$]
Donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x;y]$,

car [ARG 3: les hyp sont vérifiées]

On a alors :

il existe un $c\in]x;y[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

car [ARG 4: conclusion thm AF]

Or, on sait que $y-x>0$, car [ARG 5: choix au début (cf déf de la (dé)croissance)]

et que $f'(c)<0$, car [ARG 6: cas où $f'(x)<0$ sur $]a;b[$ par hypothèse]

donc $f(y)-f(x)<0$, car [ARG 7: règle des signes]

c'est-à-dire $f(y)<f(x)$, pour tout choix de x et y avec $x<y$.

C'est ce qu'il fallait démontrer, car [ARG 8: addition de $f(x)$ des 2 côtés de l'équation]