Théorème « Dérivée du sinus »

Théorème

Soit la fonction f : R*→R déterminée par $f(x)=\sin(x)$. Alors $f(x)'=\cos(x)$

Démonstration :

Démonstration

$$f'(x)=\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

car [1 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

car [2 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{(x+h)-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)}{h}$$

car [3 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h}$$

car [4 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\cdot\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

car [5 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

car [6 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

car [7 :...]

$$= \lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

car [8 :...]

$$= 1 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot x+0}{2}\right)$$

car [9 :...]

$$= \cos(x)$$

car [10 :...]