Dérivation – partie 4

Donnée : Une fonction réelle f définie par $f(x)=$...

Objectif : Justifier théoriquement le lien entre la dérivée f' de f et la recherche d'extrema de f

Idée 1 : approche locale

Si f est dérivable en x et si f admet un extremum en x, alors $f'(x)=0$

vrai ! mais pas directement utile pour trouver les extrema de f

Si f est dérivable en x et si $f'(x)=0$, alors f admet un extremum en x

faux! Contre-ex : $f(x)=x^3$ en $x=0$

mais ..

Idée 2 : passer d'une approche locale à une approche globale

Thm. «Im. fermé» Si f est continue sur $[a;b]$, alors il existe m et M tels que $f([a;b]) = [m;M]$

Thm. de Rolle Si f est dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$ et si $f(a)=f(b)$, alors il existe un $c\in]a;b[$ tel que

$$f'(c)=0$$

Thm. des AF Si f est dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$, alors il existe un $c\in]a;b[$ tel que

Cor. AF Si f est dérivable sur $I=]a;b[$ et continue sur $J=[a;b]$, alors :

Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est str. croissante sur J

Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est str. décroissante sur J

Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur J

Thm « 2^e dérivée »	Si f est dérivable sur I=]$a;b$[et continue sur J=[$a;b$], alors : Si $f''(x) > 0$ sur I, alors f est convexe sur J Si $f''(x) < 0$ sur I, alors f est concave sur J

Applications

Calcul de $f\,'(x)$
Factorisation de $f\,'(x)$
Zéros de $f\,'(x)$
Tableau de signes de $f\,'(x)$
(Dé)-croissance et extrema de f

Problèmes d'optimisation

Etudes de fonctions