Théorème « Accroissements finis »

Théorème des accroissements finis (ou théorème de LAGRANGE - Joseph Louis de Lagrange, 1736-1813) :

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est telle que :

f est continue sur $[a\,;b]$

f est dérivable sur $]a\,;b[$

alors il existe au moins un nombre $c \in]a\,;b[$ tel que . $f\,'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démonstration du théorème des accroissements finis :

Pour démontrer ce théorème on utilise une fonction auxiliaire Φ qui est définie comme la distance algébrique entre les graphiques de f et de la droite d passant par les points $A=(a\,;f(a))$ et $B=(b;f(b))$:

on pose donc : $\Phi(x)=f(x)-d(x)$, car [ARG 1]

Représenter graphiquement la situation:

La pente de d est égale à $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, car [ARG 2]

on a :

- Φ est continue sur $[a\,;b]$, car [ARG 3]
- Φ est dérivable sur $]a\,;b[$,car [ARG 4]
- $\Phi(a)=0$ et $\Phi(b)=0$, car [ARG 5]

La fonction Φ satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle.

Donc il existe (au moins) un nombre c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $\Phi'(c)=0$, car [ARG 6]

CC BY NC SA

Or $\Phi'(x)=f'(x)-d'(x)$, car [ARG 7]

donc $\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, car [ARG 8]

ainsi : $\Phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, car [ARG 9]

Or $\Phi'(c)=0$, car [ARG 10]

Ainsi il existe bien un $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, car [ARG 11]

Donner les arguments manquants.

CC BY NC SA