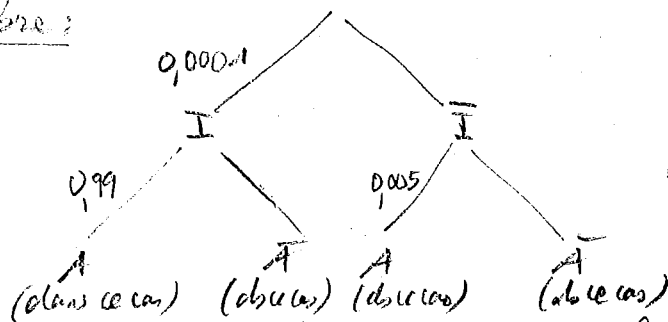


Ch4 Act 13

Premier arbre :



on donne des probabilités associées à cet arbre dans l'énoncé

on peut en déduire d'autres probabilités directement liées à l'arbre :

$E_1 =$ "il n'y a pas d'incendie"

$$P(E_1) = 1 - P(\bar{E}_1) = 1 - P(\text{"il y a incendie"}) = 1 - 0,0001 = 0,9999$$

$E_2 =$ "l'alarme ne sonne pas alors qu'il y a un incendie"
 = "l'alarme ne sonne pas sachant qu'il y a un incendie"

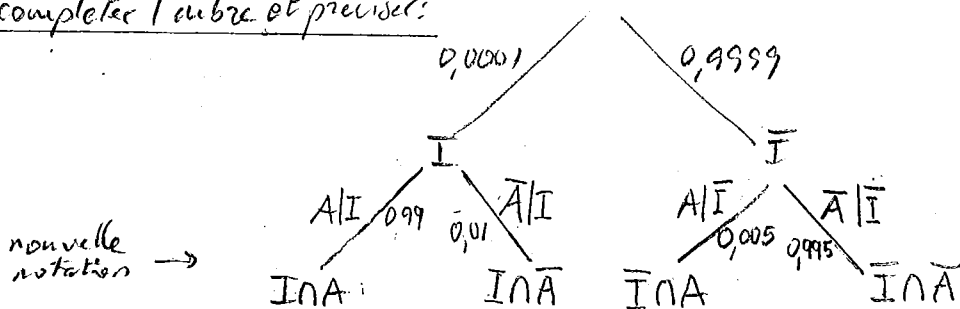
$$P(E_2) = 1 - P(\bar{E}_2) = 1 - P(\text{"l'alarme sonne sachant qu'il y a un incendie"}) \\ = 1 - 0,99 = 0,01$$

on a $E_2 = \bar{A} | I$ et $P(\bar{A} | I) = 0,01$
 sachant que ...

de même : $E_3 =$ "l'alarme ne sonne pas sachant qu'il n'y a pas d'incendie"
 = $\bar{A} | \bar{I}$

$$P(\bar{A} | \bar{I}) = 1 - P(A | \bar{I}) = 1 - 0,005 = 0,995$$

on peut aussi compléter l'arbre et préciser :



et répondre à de nouvelles questions :

$E =$ il y a un incendie et l'alarme sonne = l'alarme sonne et il y a un incendie

$$P(E) = 0,0001 \cdot 0,99 = 9,9 \cdot 10^{-5} = 0,000099 = 0,0035\%$$

$F =$ il n'y a pas d'incendie et l'alarme ne sonne pas = l'alarme ne sonne pas et il n'y a pas d'incendie

$$P(F) = 0,9999 \cdot 0,995 = 0,9949005 \approx 99,5\%$$

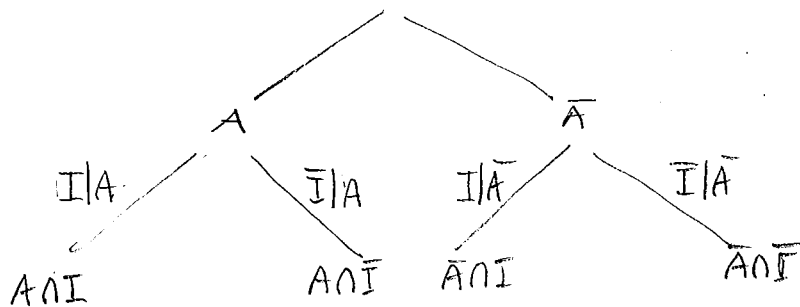
mais aussi : $A =$ "l'alarme sonne (qu'il y ait incendie ou pas)"

$$P(A) = 0,0001 \cdot 0,99 + 0,9999 \cdot 0,005 = 0,0050985 \approx 0,5\%$$

mais certaines questions restent sans réponse :

$$P(I/A), P(I/\bar{A}), P(\bar{I}/A), P(\bar{I}/\bar{A})$$

qui correspondent à un arbre à 2 :



remarque : $A \cap I = I \cap A$, $A \cap \bar{I} = \bar{I} \cap A$, etc...

nous avons pu calculer $p(A)$ avec l'arbre précédent (voir bas de page précédente),
comment calculer, par exemple, $p(I/A)$?

solution : dans cet arbre, on lit : $p(A) \cdot p(I/A) = p(A \cap I)$
d'où : $p(I/A) = \frac{p(A \cap I)}{p(A)}$

Il s'agit en fait d'une définition mathématique, qui formalise l'intuition
"on multiplie les probabilités lorsqu'on descend le long de l'arbre"

dans notre exemple : $p(I/A) = \frac{p(A \cap I)}{p(A)}$ } on utilise l'autre arbre

$$= \frac{0,0001 \cdot 0,99}{0,0001 \cdot 0,99 + 0,9999 \cdot 0,005}$$
$$= 0,02 = 2\%$$

et aussi :

$$p(\bar{I}/A) = 1 - p(I/A) = 98\%$$

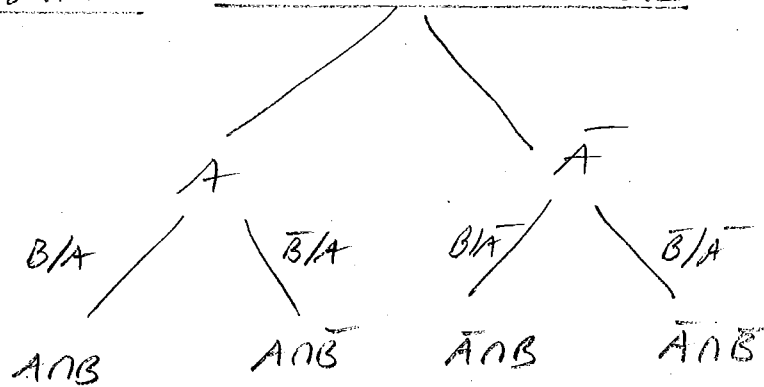
$$p(I/\bar{A}) = \frac{p(I \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0,0001 \cdot 0,01}{0,0001 \cdot 0,01 + 0,9999 \cdot 0,995} = 1,06513 \cdot 10^{-7}$$
$$= 0,000000106513 \approx 10^{-5}\%$$

$$p(\bar{I}/\bar{A}) \approx 100\%$$

Interprétation : on ne prend pas de risque !

Généralisation

Probabilité conditionnelle



$$p(A) \cdot p(B/A) = p(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \left[p(B/A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \right]$$

↑
probabilité que A se réalise sachant que A s'est réalisée