

Thm 1: $p(\Omega) = 1$

dém: $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ où A_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$ sont tous les évén. élémentaires

$$\begin{aligned} \text{donc } p(\Omega) &= p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ &= p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) \quad \downarrow \text{def prob} \\ &= 1 \quad \text{qfd} \quad \downarrow \text{Ax 2} \end{aligned}$$

Thm 2: Si $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ avec $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

dém: $A = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_i}$ on décompose A en évén. élém.
 $B = A_{\ell_1} \cup A_{\ell_2} \cup \dots \cup A_{\ell_j}$ " " B " " "

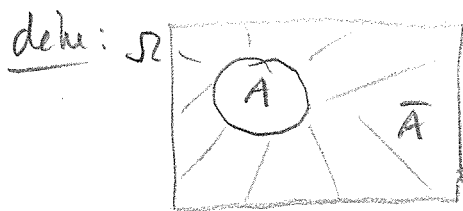
$A \cup B = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_i} \cup A_{\ell_1} \cup A_{\ell_2} \cup \dots \cup A_{\ell_j}$
avec tous ces év. élémentaires forcément disjoints car,
comme $A \cap B \neq \emptyset$ par hypothèse, il ne peut y avoir
un A_i qui serait à la fois dans A et dans B

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_i} \cup A_{\ell_1} \cup A_{\ell_2} \cup \dots \cup A_{\ell_j}) \\ &= p(A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_i}) + p(A_{\ell_1} \cup A_{\ell_2} \cup \dots \cup A_{\ell_j}) \quad \downarrow \text{def prob} \\ &= p(A) + p(B) \quad \text{qfd} \end{aligned}$$

Thm 3: $p(\emptyset) = 0$

dém: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, donc $p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset)$ car $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ et thm 2
 $= p(\Omega) + p(\emptyset)$
d'où $p(\Omega) - p(\Omega) = p(\emptyset)$
 $0 = p(\emptyset)$
qfd

d) Thm 4: Si $A \subseteq \Omega$, alors $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



on a: $A \cup \bar{A} = \Omega$
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$

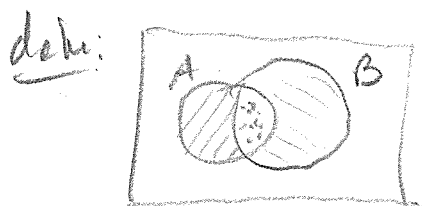
donc $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega)$

$\Leftrightarrow p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega)$ $\downarrow$ Thm 2

$\Leftrightarrow p(A) + p(\bar{A}) = 1$ $\downarrow$ Thm 1

$\Leftrightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ $\downarrow$ -p(A)
 c.q.d.

e) Thm 5: Si $A \subseteq \Omega$ et $B \subseteq \Omega$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

avec $(A \setminus B)$, $A \cap B$ et $(B \setminus A)$ disjoints 2 à 2

donc $p(A \cup B) = p((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$

$= p(A \setminus B) + p(A \cap B) + p(B \setminus A)$ $\downarrow$ Thm 2

Pour ailleurs: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ avec $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ " $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$

d'où $p(A) = p((A \setminus B) \cup (A \cap B))$ $\downarrow$ Thm 2
 $= p(A \setminus B) + p(A \cap B)$

$\Rightarrow p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$

de la même façon: $p(B \setminus A) = p(B) - p(A \cap B)$

Enfin: $p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(A \cap B) + p(B \setminus A)$ voir plus haut
 $= [p(A) - p(A \cap B)] + p(A \cap B) + [p(B) - p(A \cap B)]$
 $= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

c.q.d.