Act 3/4 **Thm:** $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n \,,\ \forall 1 \leq k \leq n \quad (k, n \in \mathbb{N}^*)$

dém:

$$C_k^n + C_{k-1}^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{(n-k+1)}{(n-k+1)} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{(n-k+1)!\cdot k!} + \frac{n!\cdot k}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1) + n!\cdot k}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!\cdot[\,n-k+1+k\,]}{(n-k+1)!\,k!}$$

$$= \frac{n!\,[\,n+1\,]}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!\cdot k!}$$

$$= C_k^{n+1}$$

Le triangle de Pascal [1654 ; mais le résultat est connu en Perse, en Arabie et en Chine auparavant !] :

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5   10  10  5   1
          ⋮
```

$$\begin{array}{ll|llllll}
 & & k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & \dots \\
 & & \multicolumn{6}{l}{\overbrace{\hspace{5cm}}^{k\text{-colonnes}}\ \dots} \\
n=0 & \multirow{6}{*}{n lignes} & 1 & & & & & \\
n=1 & & 1 & 1 & & & & \\
n=2 & & 1 & 2 & 1 & & & \\
n=3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
n=4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n=5 & & 1 & 5 & \boxed{10} & 5 & 4 & 1 \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

où le nombre situé à la n-ième ligne et à la k-ième colonne est C_k^n

ex : $C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$

Le thm $C_k^{n+1} = C_{k-1}^n + C_k^n$ dit que l'élément situé à la $(n+1)$-ième ligne et à la k-ième colonne s'obtient comme somme des deux éléments situés "au-dessus" de lui !

ex : $C_2^5 = C_1^4 + C_2^4 \iff 10 = 4 + 6$

Lien avec $(x+y)^n$

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\text{-fois}}$$

· effectuer toutes les distributivités pour obtenir la forme développée, c'est dans chaque parenthèse devoir choisir x ou y ;

si on choisit que les "x", on obtient : x^n

si on choisit un "x" et $(n-1)$ "y", on obtient : $n\cdot x\cdot y^{n-1}$

il y a n façons de choisir un "x" c'est C_1^n

si on choisit 2 "x" et $(n-2)$ "y", on obtient : $C_2^n x y^{n-2}$

il y a C_2^n façons de choisir, sans ordre les 2 "x"

⋮

si on choisit k "x" et $(n-k)$ "y" : $C_k^n x^k y^{n-k}$

⋮

d'où : $(x+y)^n = x^n + C_1^n x y^{n-1} + C_2^n x^2 y^{n-2} + \ldots + C_k^n x^k y^{n-k} + \ldots + y^n$

$= C_0^n x^n + C_1^n x y^{n-1} + C_2^n x^2 y^{n-2} + \ldots + C_k^n x^k y^{n-k} + \ldots + C_{n-1}^n x^{n-1} y + C_n^n y^n$

$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k}$

remarque : par symétrie, on a aussi : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} \cdot y^k$

Càd :

$(x+y)^0 = 1 \qquad\qquad 1$

$(x+y)^1 = 1\cdot x + 1\cdot y \qquad\qquad 1 \quad 1$

$(x+y)^2 = 1\cdot x^2 + 2xy + 1y^2 \qquad\qquad 1 \quad 2 \quad 1$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \qquad\qquad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$(x+y)^4 = 1x^3 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \qquad\qquad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

etc... $\qquad\qquad$ etc...

Application : $x = y = 1 \Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_k^n$

càd : $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$

Remarque : On aurait aussi pu démontrer $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k$ par récurrence

H.R : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$

à dém : $(x+y)^{n+1} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k$ (pour le même n)

dém : $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) \overset{H.R.}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \right) \cdot (x+y)$

$\overset{\text{distr.}}{=} \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^{n+1}$

$\overset{\text{extraire 2 termes particuliers}}{=} C_0^n x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n x^{n-k} y^{n+1} \right) + C_n^n y^{n+1}$

$\overset{\text{renuméroter la 2e somme}}{=} C_0^n x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^n x^{n-(k-1)} y^{n+1} \right) + C_n^n y^{n+1}$

$\overset{\text{mise en évidence}}{=} C_0^n x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(C_k^n + C_{k-1}^n \right) \cdot x^{n+1-k} y^k \right) + C_n^n y^{n+1}$

$\overset{\text{thm}}{=} C_0^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k + C_n^n y^{n+1}$

$\overset{1 = C_0^n = C_0^{n+1},\ 1 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1}}{=} C_0^{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k + C_{n+1}^{n+1} y^{n+1}$

$= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k$

cqfd

reste cas $n = 0$: $(x+y)^0 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{0} C_k^n x^{n-k} y^k$

$\Leftrightarrow 0 \overset{?}{=} 0$ ok