Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration

I) Hypothèse : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration :

$\vec{u} \cdot \vec{v} \ = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$, car [ARG 1 : *déf. pr.scalaire*]

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, car [ARG 2 : *hypothèse*]

donc $\alpha = 90°$, car [ARG 3 : *déf de « orthogonalité »*]

donc $\cos(\alpha) = 0$, car [ARG 4 : *déf du cos*]

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} \ = 0$, car [ARG 5 : *un nombre multiplié par 0 donne 0*]

II) Hypothèse : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Démonstration :

$\vec{u} \cdot \vec{v} \ = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$, car [ARG 6 : *déf. pr.scalaire*]

Or $\vec{u} \cdot \vec{v} \ = 0$, car [ARG 7 : *hypothèse*]

donc $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) = 0$, car [ARG 8 : *substitution OU comparaison*]

On sait que $\|\vec{u}\| \neq 0, \|\vec{v}\| \neq 0$, car [ARG 9 : *hypothèse et définition de la norme*]

donc $\cos(\alpha) = 0$

donc $\alpha = 90°$, car [ARG 10 : *déf du cos et l'angle est entre 0° et 180°*]

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, car [ARG 11 : *déf de « orthogonalité »*]